ACTIVIDADES PARA EL AULA

- CON CALCULADORA CIENTÍFICA -

CASIO
División Educativa

Federación
Española de
Sociedades de
Profesores de
Matemáticas

ACTIVIDADES PARA EL AULA
- CON CALCULADORA CIENTÍFICA -

CASIO
División Educativa

Federación
Española de
Sociedades de
Profesores de
Matemáticas

ACTIVIDADES PARA EL AULA CON CALCULADORA CIENTÍFICA

ISBN Versión Impresa: 978-84-945722-5-8

ISBN Versión Digital: 978-84-945722-6-5

Depósito legal: M-17841-2017

AUTORES

Encarnación Amaro Parrado
LLuís Bonet Juan
Marià Cano Santos
Agustín Carrillo de Albornoz Torres
José María Chacón Íñigo
José Manuel Fernández Rodríguez
Claudia Lázaro del Pozo
Goyo Lekuona Muxika
Encarnación López Fernández
Abel Martín Álvarez
Juan Martínez Calvete
Miquel Àngel Amengual Vidal
Onofre Monzó del Olmo
María Teresa Navarro Moncho
Mª Cristina Naya Riveiro
Ricard Peiró i Estruch
Rafael Pérez Laserna
María Ángeles Rodríguez Burgui
Damián Valdevira Gracia
Rosario Fátima Zamora Pérez

EDITADO POR:

CASIO ESPAÑA División Educativa
C/ Josep Pla, 2 Torre B2 Planta 12
08019 Barcelona
info-calculadoras@casio.es
www.edu-casio.es

Federación Española de Sociedades de Profesores de Matemáticas (FESPM)
C/ Hermanos Carvajal, 5
23740 Andújar, Jaén
fespm@fespm.es
www.fespm.es

COMITÉ EDITORIAL:
Agustín Carrillo de Albornoz Torres
María Teresa Navarro Moncho
Jordi Pardeiro Gay
Daniel Vila Martínez

DISEÑO Y MAQUETACIÓN:
Finder & Wilber
www.finderandwilber.com

A Mauricio Contreras,
primer coordinador del grupo de trabajo
sobre calculadoras de la FESPM - CASIO.

Es un motivo de satisfacción para la División Educativa CASIO, presentar la edición de este libro, que recoge los contenidos sobre aritmética, álgebra y estadística del currículum de matemáticas para la ESO, un libro orientado a aquellos profesores que deseen trabajar los mismos con la calculadora como recurso didáctico.

Aunque desde hace años se produce un debate sobre el uso de la calculadora en los distintos niveles educativos, la realidad es que su uso se está generalizando, sobre todo en el caso de calculadoras científicas y también, aunque en menor medida, de las gráficas y de las que ofrecen CAS, como es evidente, cada una en el nivel educativo adecuado.

La Federación Española de Sociedades de Profesores de Matemáticas lleva años apostando por su uso en el aula y en cualquier prueba de evaluación tanto interna como externa. Prueba de ello es el grupo de trabajo que desde hace algunos cursos está realizando propuestas para facilitar su uso y sobre todo elaborando materiales que ayuden al profesorado a descubrir las posibilidades que este recurso les ofrece para la enseñanza y aprendizaje de las matemáticas.

Para todas estas acciones, la FESPM cuenta con el apoyo de la División educativa de CASIO que colabora en las distintas acciones realizadas por sus sociedades, como son los cursos de formación, congresos y también en las olimpiadas matemáticas. Fruto de esta colaboración, no podía faltar la difusión de estos materiales.

Los materiales desarrollados en este libro muestran el gran abanico de posibilidades que una calculadora científica ofrece para abordar el extenso currículum de matemáticas la ESO, siendo una herramienta fundamental y actual en la enseñanza y aprendizaje de las matemáticas.

Esperamos que los lectores aprovechen las actividades que proponemos y sobre todo, que este libro les resulte de utilidad para su trabajo en el aula.

Queremos agradecer especialmente a los autores el esfuerzo y trabajo desinteresado en la realización de este libro, fruto de su contrastada experiencia en el aula.

También queremos agradecer la colaboración de la FESPM sin la cual la realización de este libro no hubiera sido posible, y remarcar el esfuerzo que desde hace muchos años realiza para fomentar el uso didáctico de la calculadora, siguiendo las tendencias de otros países europeos destacados en la enseñanza y aprendizaje de las matemáticas.

Daniel Vila Martínez
Coordinador División Educativa CASIO ESPAÑA

Con esta colección de actividades iniciamos una serie de publicaciones que tienen por objeto dotar al profesorado de herramientas para desarrollar en las aulas, con las mejores garantías, la implementación del currículo de Matemáticas.

Esta serie es heredera de la que durante varios años ha publicado la Sociedad Andaluza de Educación Matemática (SAEM) Thales con la colaboración de CASIO División Educativa.

Convencidos de las posibilidades que ofrecen las calculadoras como recurso didáctico para el área de matemáticas en sus distintos niveles, la FESPM ya elaboró, en octubre de 2008, un manifiesto para impulsar su incorporación en la aulas de todos los niveles educativos.

Aunque la investigación en Didáctica de las Matemáticas ha mostrado que el uso de tecnología, en particular las calculadoras, favorece el aprendizaje de ciertos procesos y conceptos y ayuda a superar algunos obstáculos, estas innovaciones no se ven reflejadas en el día a día de la mayoría de aulas y no tienen presencia en los libros de texto habituales. Conscientes de este hecho, se constituyó el *Grupo de Trabajo sobre diseño e implementación de experiencias didácticas con calculadora*. Este grupo es el que ha diseñado y seleccionado las actividades que aquí se presentan.

Cualquier cambio metodológico, y más cuando se incorpora el uso de recursos como es el caso de la calculadora, supone un esfuerzo por parte del profesorado. Esta publicación pretende, en la medida de lo posible, aligerar esa carga proporcionando una serie de propuestas, con problemas en contexto, preparadas para ser llevados directamente a clase, pues ya han sido implementadas por las profesoras y profesores del grupo. Además de las propuestas para el alumnado, se incluyen sugerencias didácticas para el profesorado.

Esta publicación no sería posible sin la inestimable colaboración de CASIO División Educativa, que apoya las actividades que le propone FESPM.

Como cualquier propuesta didáctica, esta no tiene sentido si no es asumida por el profesorado y llevada al aula, así que animamos al profesorado de Matemáticas a que pruebe alguna de las actividades que contiene este libro y descubra el abanico de posibilidades que proporciona un recurso de su uso cotidiano como la calculadora.

Onofre Monzó del Olmo
Presidente de FESPM

Así es este libro

Este libro está compuesto por numerosas actividades concebidas para llevar al aula de manera que el alumnado trabaje y explore de forma práctica y autónoma múltiples conceptos matemáticos haciendo uso de la calculadora científica. Las actividades se desarrollan a partir de problemas contextualizados basados en supuestos reales y han sido probadas en el aula por sus respectivos autores.

La primera página de cada actividad se dirige al alumno; en ella se expone el problema y se plantea una serie de cuestiones. Las siguientes páginas se dirigen al profesorado y contienen orientaciones didácticas y técnicas, así como un ejemplo de solución. Se incluyen también propuestas de problemas de resolución rápida y otras actividades sugeridas.

A continuación se muestran los elementos que componen cada actividad.

Título y clasificación de la actividad

Bloque curricular

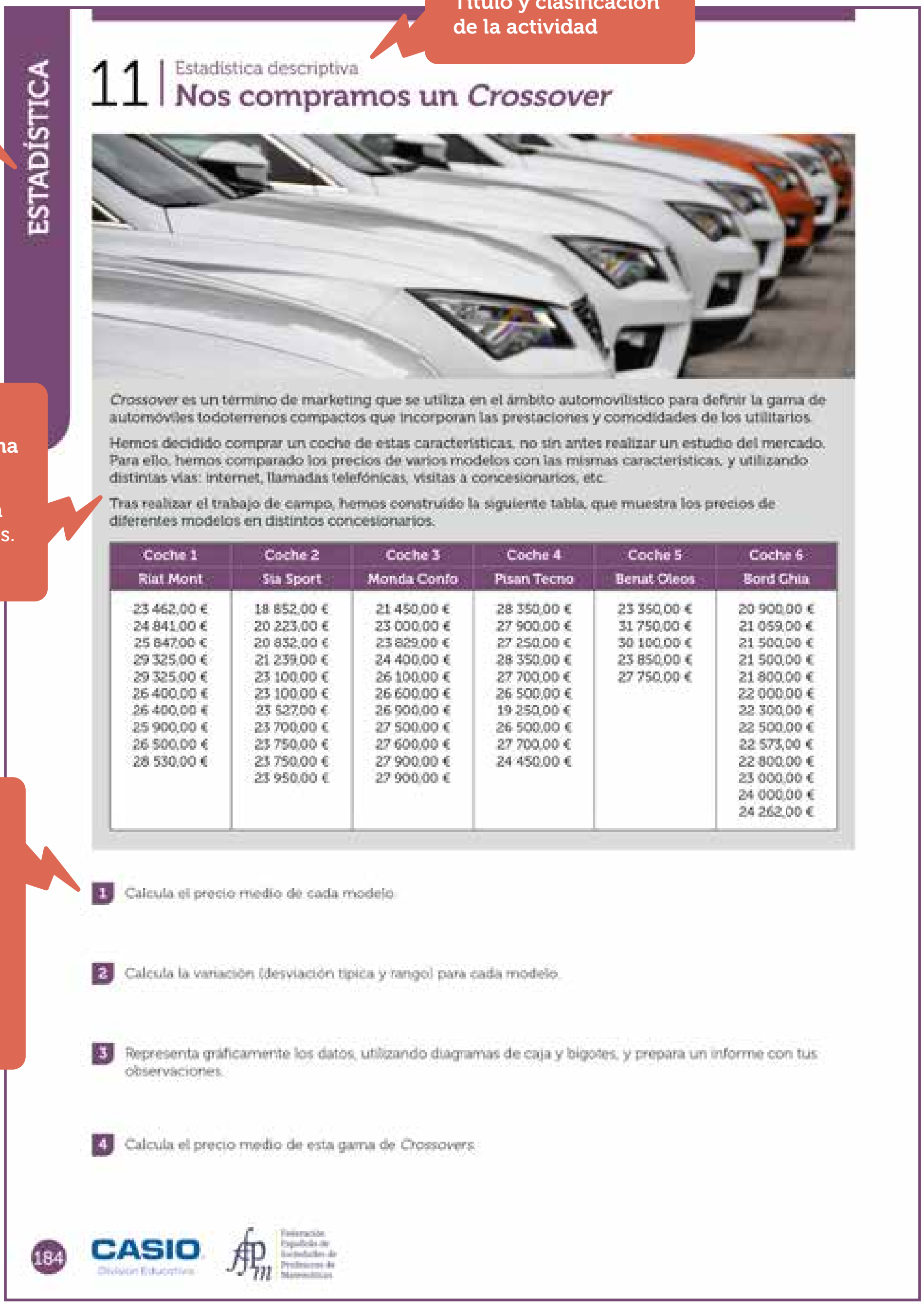
En este libro se plantean actividades en las que se trabajan tres grandes bloques curriculares: Aritmética, Álgebra y Estadística.

Enunciado del problema

Propuesta contextualizada basada en supuestos cotidianos.

Cuestiones

Cuestiones relacionadas con el enunciado del problema. Los cálculos que permiten dar respuestas a estas cuestiones requieren, en ocasiones, hacer uso de una hoja aparte.



ESTADÍSTICA

11 | Estadística descriptiva
Nos compramos un *Crossover*

Crossover es un término de marketing que se utiliza en el ámbito automovilístico para definir la gama de automóviles todoterrenos compactos que incorporan las prestaciones y comodidades de los utilitarios.

Hemos decidido comprar un coche de estas características, no sin antes realizar un estudio del mercado. Para ello, hemos comparado los precios de varios modelos con las mismas características, y utilizando distintas vías: internet, llamadas telefónicas, visitas a concesionarios, etc.

Tras realizar el trabajo de campo, hemos construido la siguiente tabla, que muestra los precios de diferentes modelos en distintos concesionarios.

Coche 1	Coche 2	Coche 3	Coche 4	Coche 5	Coche 6
Riat Mont	Sia Sport	Monda Confo	Pisan Tecno	Benat Oleos	Bord Ghia
23 462,00 €	18 852,00 €	21 450,00 €	28 350,00 €	23 350,00 €	20 900,00 €
24 841,00 €	20 223,00 €	23 000,00 €	27 900,00 €	31 750,00 €	21 059,00 €
25 847,00 €	20 832,00 €	23 829,00 €	27 250,00 €	30 100,00 €	21 500,00 €
29 325,00 €	21 239,00 €	24 400,00 €	28 350,00 €	23 850,00 €	21 500,00 €
29 325,00 €	23 100,00 €	26 100,00 €	27 700,00 €	27 750,00 €	21 800,00 €
26 400,00 €	23 100,00 €	26 600,00 €	26 500,00 €		22 000,00 €
26 400,00 €	23 527,00 €	26 900,00 €	19 250,00 €		22 300,00 €
25 900,00 €	23 700,00 €	27 500,00 €	26 500,00 €		22 500,00 €
26 500,00 €	23 750,00 €	27 600,00 €	27 700,00 €		22 573,00 €
28 530,00 €	23 750,00 €	27 900,00 €	24 450,00 €		22 800,00 €
	23 950,00 €	27 900,00 €			23 000,00 €
					24 000,00 €
					24 262,00 €

1 Calcula el precio medio de cada modelo.

2 Calcula la variación (desviación típica y rango) para cada modelo.

3 Representa gráficamente los datos, utilizando diagramas de caja y bigotes, y prepara un informe con tus observaciones.

4 Calcula el precio medio de esta gama de *Crossovers*.

184 CASIO División Educativa

Página dirigida al alumnado

DESCÁRGATE EL LIBRO EN:

www.edu-casio.es

www.fespm.es

Materiales

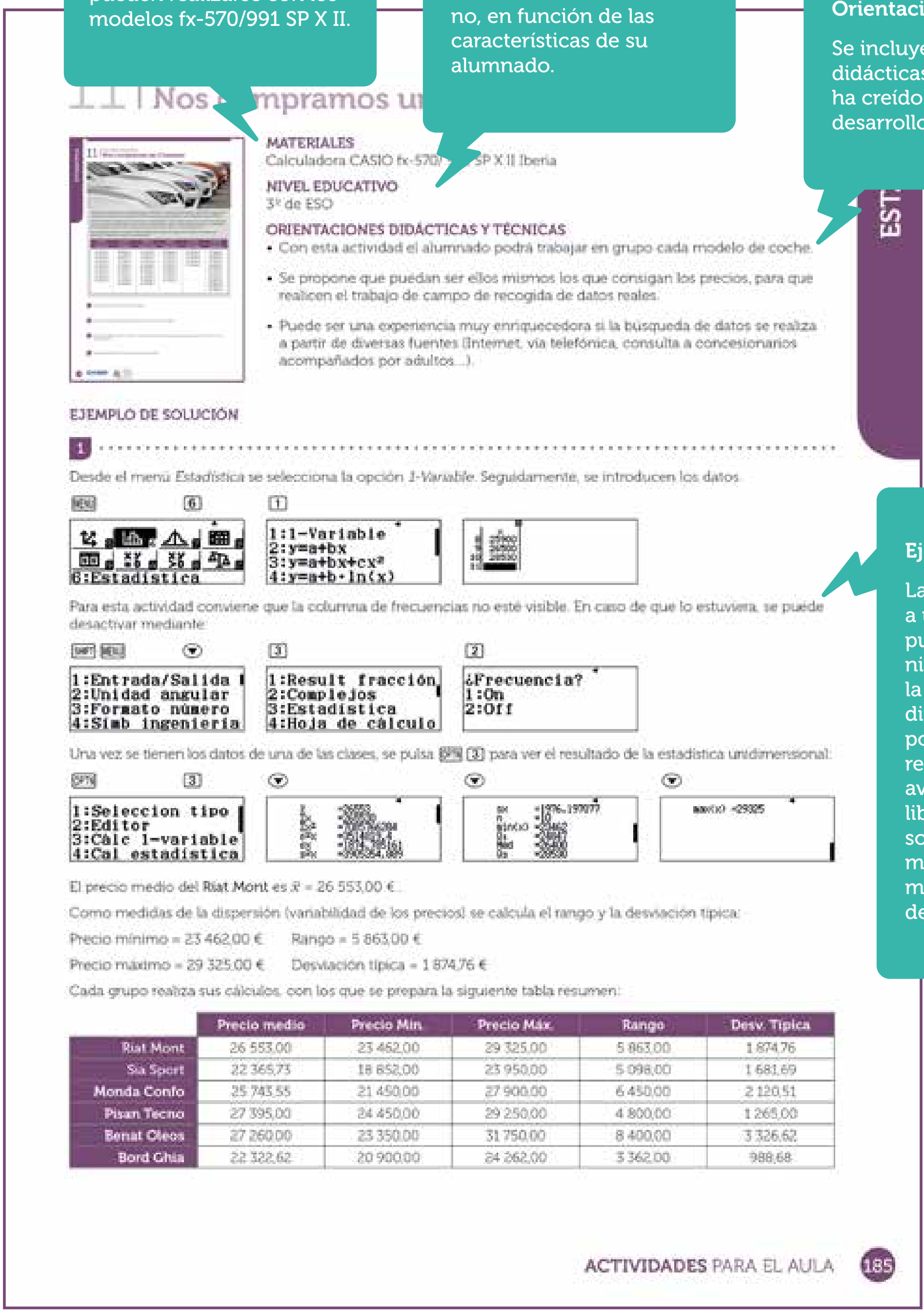
Se especifican los materiales que son necesarios para realizar la actividad. En concreto, se especifica el modelo de calculadora cuyo uso se recomienda. Siempre que sea posible se hará uso de los modelos fx-82/85/350 SP X II, entendiéndose que todas las actividades pueden realizarse con los modelos fx-570/991 SP X II.

Nivel educativo

Propuesta del nivel educativo al que va dirigida la actividad. Se trata de una simple sugerencia que el docente puede tomar en consideración o no, en función de las características de su alumnado.

Orientaciones didácticas y técnicas

Se incluyen algunas orientaciones didácticas y técnicas que se ha creído conveniente para el desarrollo de la actividad.



11 | Nos ... mpramos u...

MATERIALES

Calculadora CASIO fx-570/... SP X II Iberia

NIVEL EDUCATIVO

3º de ESO

ORIENTACIONES DIDÁCTICAS Y TÉCNICAS

- Con esta actividad el alumnado podrá trabajar en grupo cada modelo de coche.
- Se propone que puedan ser ellos mismos los que consigan los precios, para que realicen el trabajo de campo de recogida de datos reales.
- Puede ser una experiencia muy enriquecedora si la búsqueda de datos se realiza a partir de diversas fuentes (Internet, vía telefónica, consulta a concesionarios acompañados por adultos...).

EJEMPLO DE SOLUCIÓN

1

Desde el menú *Estadística* se selecciona la opción *1-Variable*. Seguidamente, se introducen los datos.

Para esta actividad conviene que la columna de frecuencias no esté visible. En caso de que lo estuviera, se puede desactivar mediante:

Una vez se tienen los datos de una de las clases, se pulsa OPTN 3 para ver el resultado de la estadística unidimensional:

El precio medio del Riat Mont es $\bar{x}$ = 26 553,00 €.

Como medidas de la dispersión (variabilidad de los precios) se calcula el rango y la desviación típica:

Precio mínimo = 23 462,00 € Rango = 5 863,00 €

Precio máximo = 29 325,00 € Desviación típica = 1 874,76 €

Cada grupo realiza sus cálculos, con los que se prepara la siguiente tabla resumen:

	Precio medio	Precio Mín.	Precio Máx.	Rango	Desv. Típica
Riat Mont	26 553,00	23 462,00	29 325,00	5 863,00	1 874,76
Sia Sport	22 365,73	18 852,00	23 950,00	5 098,00	1 681,69
Monda Confo	25 743,55	21 450,00	27 900,00	6 450,00	2 120,51
Pisan Tecno	27 395,00	24 450,00	29 250,00	4 800,00	1 265,00
Benat Oleos	27 260,00	23 350,00	31 750,00	8 400,00	3 326,62
Bord Ghia	22 322,62	20 900,00	24 262,00	3 362,00	988,68

ACTIVIDADES PARA EL AULA 185

Ejemplo de solución

La solución propuesta responde a una posible respuesta que pueda ofrecer un alumno del nivel educativo al que se dirige la actividad. Existen, obviamente, diferentes métodos de resolución posibles, algunos de los cuales requieren un conocimiento avanzado de la calculadora. En este libro se ha optado por escoger las soluciones que se han considerado más didácticas, mostrando el máximo número de funcionalidades de la calculadora.

Página dirigida al profesorado

Índice

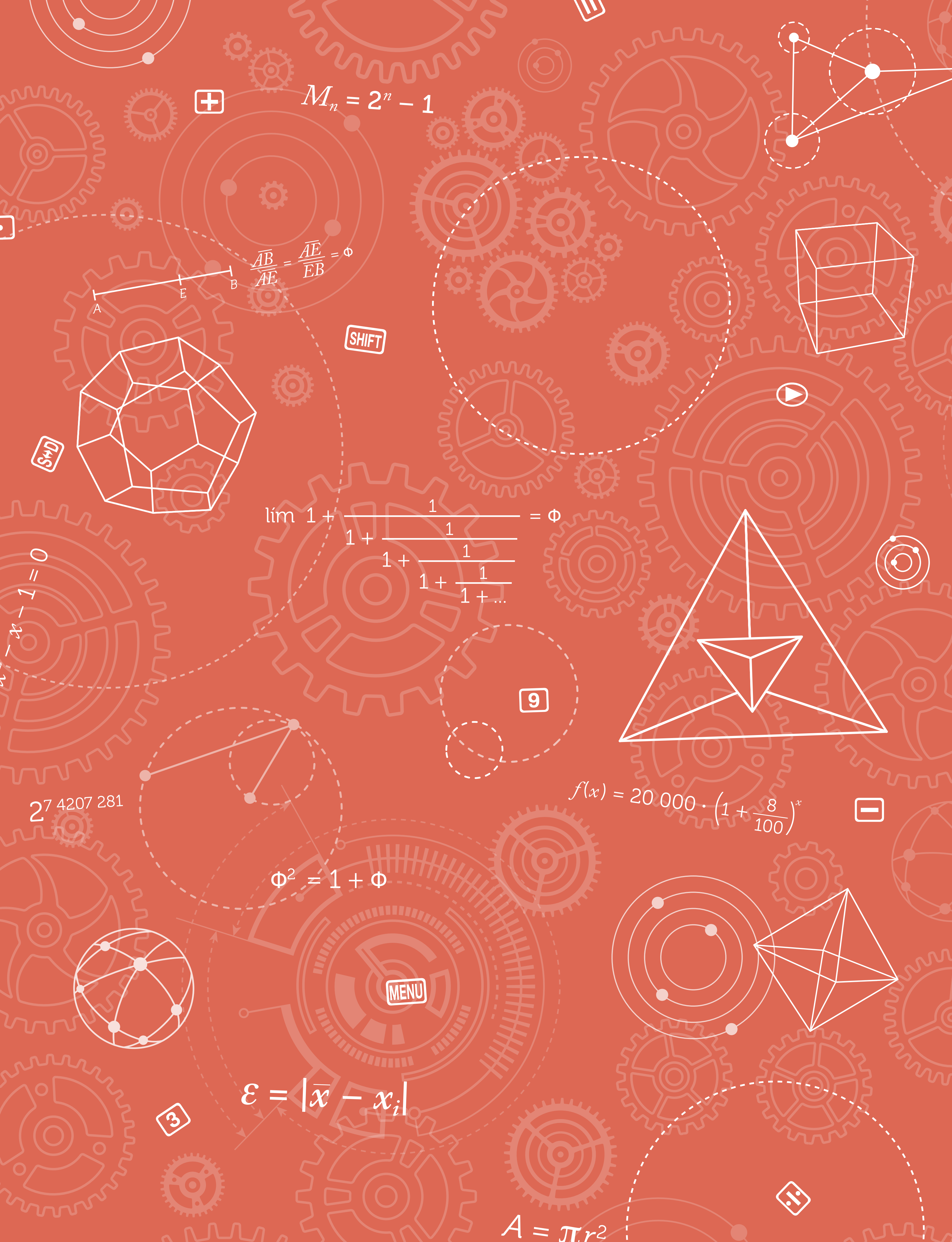
ACTIVIDADES DE **ARITMÉTICA**

Índice

Índice

ACTIVIDADES DE **ESTADÍSTICA**

ANEXO


$M_n = 2^n - 1$
$\frac{AB}{AE} = \frac{AE}{EB} = \Phi$
A E B
SHIFT
$\lim 1 + \cfrac{1}{1+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{1+\dots}}}} = \Phi$
9
$2^{74207281}$
$f(x) = 20\,000 \cdot \left(1 + \frac{8}{100}\right)^x$
$\Phi^2 = 1 + \Phi$
MENU
$\varepsilon = |\bar{x} - x_i|$
3
$A = \pi r^2$

01 | Aproximaciones y errores
Errores absolutos y errores relativos

Siempre que se realiza una medición o la estimación de una magnitud, se comete un error. Se distinguen dos tipos de errores:

El **error absoluto**, ε, se define como la diferencia positiva entre el valor real, $\bar{x}$, de una determinada magnitud y el valor estimado, x_i.

$$\varepsilon = |\bar{x} - x_i|$$

En ocasiones el error absoluto aparece detrás del valor estimado y precedido por el signo ±, indicando el margen en el que se encuentra el valor real.

El **error relativo**, ε_r, se define como el cociente del error absoluto y el valor real, $\bar{x}$, de la magnitud. Se puede expresar en % o en tanto por 1.

$$\varepsilon_r = \frac{|\bar{x} - x_i|}{\bar{x}}$$

Ejemplo: se ha estimado que en un monedero hay 160 monedas, pero al contarlas una a una se ha constatado que realmente hay 156.

Error absoluto: $\varepsilon = |156 - 160| = 4$ monedas

Error relativo: $\varepsilon_r = \frac{4}{156} = 0{,}026 = 2{,}6\ \%$

1 Calcula el error absoluto que se comete al estimar en 15 minutos un intervalo de tiempo que dura realmente 16 minutos y medio.

2 Se estima que en un hormiguero hay 2 000 hormigas, con un error del 15 %. ¿Cuál es el número máximo de hormigas que se espera que haya en el hormiguero? ¿Y el mínimo?

3 Se ha calculado la distancia de la Tierra a la Luna y se ha obtenido un resultado de 385 000 km. Sin embargo, un láser ha determinado que la distancia real es de 357 000 km. ¿Cuál es el error relativo que se ha cometido al realizar los cálculos?

4 Se estima que la altura de un edificio se sitúa entre los 18,5 m y los 19,1 m. ¿Cuáles son los errores absoluto y relativo de esta estimación?

5 El volumen de un depósito se estima en 357,5 L, con un margen de error de medio litro. ¿Cuál es el error relativo de esta estimación?

6 Juana va a recibir este mes una bonificación de 150 €, que se añade a su salario, estipulado en 1 200 €. Juana calcula que esa bonificación representa un incremento en sus ingresos del 15 %. ¿Qué error comete al realizar la estimación?

7 Una balanza de plato tiene una precisión máxima de 1/4 de kg. En dicha balanza se pesa una determinada cantidad de nueces, para elaborar una tarta, y se obtiene una lectura de 6 kg y cuarto. ¿Cuál podemos esperar que sea el peso real de las nueces? ¿Cuál es el porcentaje de error?

01 Aproximaciones y errores
Errores absolutos y errores relativos

MATERIALES
Calculadora CASIO fx-82/85/350 SP X II Iberia o superior

NIVEL EDUCATIVO
3º de ESO

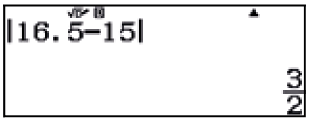
ORIENTACIONES DIDÁCTICAS Y TÉCNICAS
- Estas actividades pueden servir para introducir los conceptos de error relativo y error absoluto, sin que se requieran conocimientos previos al respecto.
- Para realizar estas actividades, hay que hacer uso de la función *Abs*, a la que se accede mediante [SHIFT] [Simp].
- Al realizar algunas operaciones, los resultados pueden aparecer en forma de fracción en lugar de en forma decimal. Para cambiar la expresión de los resultados entre estos dos modos hay que presionar la tecla [S⇔D]. Si se desea que los resultados se expresen en forma decimal de manera predeterminada, hay que modificar la configuración de la calculadora y fijar la *Entrada/Salida* en la opción *2: E Mat/S Decimal*.
- Para modificar la configuración se procede de la siguiente manera: [SHIFT] [MENU] [1] [2].

EJEMPLO DE SOLUCIÓN

1

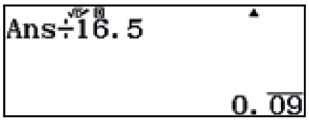
El error absoluto es:

[SHIFT] [Simp] [1] [6] [•] [5] [−] [1] [5] [=] [S⇔D]

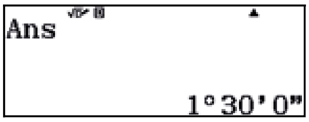


Que se interpreta como, 1 min y 30 s.
El error relativo se calcula como:

[÷] [1] [6] [•] [5] [=]

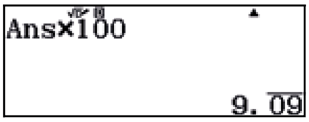


Es decir, un minuto y medio. Este resultado puede expresarse en minutos y segundos pulsando: [°'"]



Este resultado se expresa en tanto por ciento como:

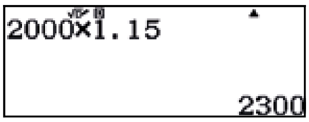
[×] [1] [0] [0] [=]



2

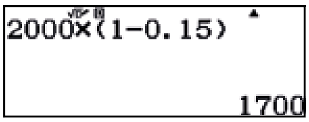
El número máximo de hormigas esperable es:

[2] [0] [0] [0] [×] [1] [•] [1] [5] [=]



En cuanto al número mínimo de hormigas, resulta:

[2] [0] [0] [0] [×] [(] [1] [−] [0] [•] [1] [5] [)] [=]

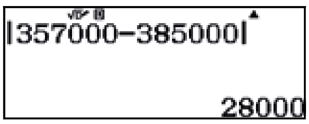


En consecuencia, en el hormiguero hay entre 1 700 y 2 300 hormigas.

3

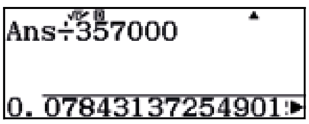
El error absoluto que se ha cometido es:

[SHIFT] [Simp] [3] [5] [7] [0] [0] [0] [−] [3] [8] [5] [0] [0] [0] [=]



En cuanto al error relativo, resulta:

[Ans] [÷] [3] [5] [7] [0] [0] [0] [=]



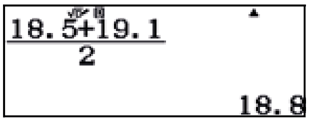
O, lo que es lo mismo, aproximadamente, del 7,84 %.

Errores absolutos y errores relativos

4

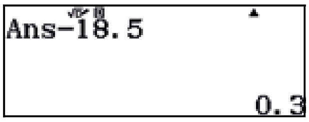
Se puede considerar el valor de la medida como la media aritmética más-menos el error absoluto que se comete. La media aritmética de las dos medidas es:

(1 8 . 5 + 1 9 . 1) ÷ 2 =



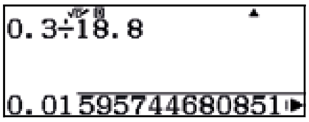
En cuanto al error absoluto, resulta:

Ans − 1 8 . 5 =



El error relativo se calcula como:

0 . 3 ÷ 1 8 . 8 =



Que en tanto por ciento se expresa de la siguiente manera:

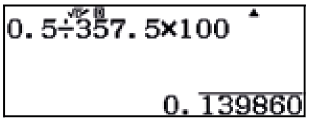
× 1 0 0 =

En consecuencia, el error relativo es, aproximadamente del 1,60 %.

5

El error absoluto es de 0,5 L y el relativo, expresado en tanto por ciento, se calcula como:

0 . 5 ÷ 3 5 7 . 5 = × 1 0 0 =

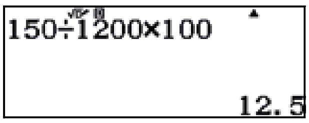


Es decir, el error relativo es del 0,14 %.

6

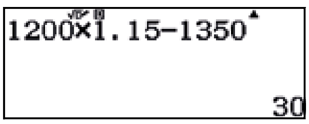
El incremento real es:

1 5 0 ÷ 1 2 0 0 × 1 0 0 =



Por tanto, resulta de sólo un 12,5 %. El error cometido puede calcularse en términos absolutos como:

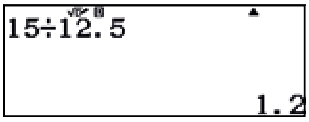
1 2 0 0 × 1 . 1 5 − 1 3 5 0 =



Es decir, supone 30 € menos que el 15 % anunciado.

Al afirmar que el incremento es del 15 %, en lugar del 12,5 % real, se ha cometido el siguiente error relativo:

1 5 ÷ 1 2 · 5 =

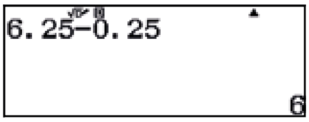


O sea, un error relativo del 20 %.

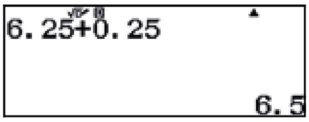
7

La precisión de la balanza es de 0,25 kg, de manera que podemos esperar que el peso de las nueces esté comprendido entre las siguientes medidas:

6 · 2 5 − 0 · 2 5 =

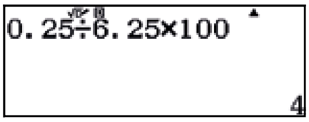


6 · 2 5 + 0 · 2 5 =



El error relativo asociado a la balanza, expresado en % es:

0 · 2 5 ÷ 6 · 2 5 × 1 0 0 =



Es decir, de un modesto 4 %.

02 | Aproximaciones y errores
¿Tomo la medicación de forma correcta?

A un paciente le han prescrito 5 mg diarios de un determinado medicamento, que se distribuye en pastillas de 10 mg.

Para consumir la dosis adecuada, el paciente decide dividir cada pastilla en dos mitades. A continuación se muestran las masas de las diferentes dosis que ha ingerido durante el tratamiento, que dura 10 días. La masa de las mitades se ha determinado con una balanza analítica de 0,01 mg de precisión:

4,55	**5,84**	**4,06**	**5,63**	**5,49**
4,08	**3,99**	**5,71**	**6,01**	**4,25**

1 Indica, con tres cifras significativas, el valor promedio de la dosis diaria de medicamento que consume el paciente durante los 10 días que dura el tratamiento.

2 ¿Entre qué valores está comprendida la dosis diaria?

3 ¿Cuál es el mayor error absoluto que se ha cometido al dividir las pastillas en dos?

4 ¿Cuál es el error relativo que corresponde al mayor error absoluto cometido?

5 ¿Está el paciente siguiendo el tratamiento adecuadamente?

¿Tomo la medicación de forma correcta?

MATERIALES

Calculadora CASIO fx-82/85/350 SP X II Iberia o superior

NIVEL EDUCATIVO

3º de ESO

ORIENTACIONES DIDÁCTICAS Y TÉCNICAS

- Se ha propuesto esta actividad para trabajar el cálculo aproximado, el redondeo y el error. También se debe conocer la media aritmética. Además de tratar los contenidos curriculares correspondientes, se analiza y valora nuestro consumo de medicamentos, así como abrir un debate que motive la reflexión sobre el consumo adecuado de los mismos.
- Conviene prestar especial atención al modo de configurar el formato de número en la calculadora para fijar el número de decimales que se desee, usando la secuencia [SHIFT] [MENU] [3] [1].

EJEMPLO DE SOLUCIÓN

1

Se introducen los datos y se configura la calculadora para que muestre dos cifras decimales mediante la secuencia [SHIFT] [MENU] [3] [1] [2]. Seguidamente, se determinan los parámetros estadísticos:

[AC] [OPTN]

```
FIX
   Estadística
    1-Variable
```

[▼]

```
1:Seleccion tipo
2:Cálc 1-variable
3:Datos
```

[2]

```
1:Sumatorios
2:Parámetros
3:Mínimo/Máximo
```

[1]

```
1:x̄        2:σ²x
3:σx       4:s²x
5:sx       6:n
```

[=]

```
x̄          FIX
           4.96
```

El promedio de la dosis diaria es de 4,96 mg.

2

Los valores máximo y mínimo se determinan con las siguientes secuencias:

[AC] [OPTN] [▼] [3] [1] [=]

```
min(x)     FIX
           3.99
```

[AC] [OPTN] [▼] [3] [5] [=]

```
max(x)     FIX
           6.01
```

3

El máximo error absoluto se encuentra evaluando qué error se comete en los extremos:

[AC] [SHIFT] [Simp] [4] [•] [9] [6] [−] [3] [•] [9] [9] [=]

```
Abs(4.96−3.99)
           0.97
```

[AC] [SHIFT] [Simp] [4] [•] [9] [6] [−] [6] [•] [0] [1] [=]

```
Abs(4.96−6.01)
           1.05
```

El mayor error absoluto de 1,05 mg, se comete con la pastilla cuya masa es de 6,01 g.

4

El error relativo resulta ser:

[AC] [1] [•] [0] [5] [÷] [4] [•] [9] [6] [=] [×] [1] [0] [0] [=]

```
1.05÷4.96
           0.21
Ans×100
          21.17
```

Es decir, del 21,17 %.

5

A partir de los resultados obtenidos en los apartados anteriores, los alumnos han de razonar sobre si el paciente está siguiendo el tratamiento de manera adecuada. Es decir, si está consumiendo la dosis recomendada.

03 Aproximaciones y errores
El número pi. Errores de cálculo a lo largo de la historia

La civilización sumeria es considerada como la primera y más antigua civilización del mundo. Los sumerios se asentaron en la antigua Mesopotamia, donde levantaron las primeras ciudades, en las que destacaban los impresionantes zigurats, e inventaron, entre otras cosas, la escritura y la rueda.

Los sumerios disponían de un sistema de numeración aditivo que combinaba el sistema decimal con el sexagesimal y, tal como recogieron en una de las tablillas de arcilla encontradas en Susa, aproximaban el número π por 3 + 1/8.

A lo largo de la historia, diversas civilizaciones y matemáticos han obtenido sus propias aproximaciones de π, normalmente en forma de fracción. Algunas de estas aproximaciones las debemos a:

Los sumerios	**Papiro de Rhind**	**La Biblia**
Arquímedes de Siracusa	**Ptolomeo**	**Vitruvio**
Zu Chongzhi	**Brahmagupta**	**Al-Jwarizmi**

1. ¿Qué es el número π? ¿Es un número real? ¿Se puede expresar como fracción? ¿Es un número irracional?

2. Cuando te dispones a realizar un problema en el que aparece el número π, ¿cuál es el valor aproximado que tomas?

3. ¿Cuál es el valor de π que muestra la pantalla de tu calculadora?

4. ¿Cuál es el valor de π que utiliza íntegramente tu calculadora? Diseña una estrategia para visualizar los dígitos ocultos.

5. ¿Crees que existe el día de π? En caso afirmativo, ¿cuándo se celebra?

6. Averigua el valor de π que hallaron las civilizaciones y matemáticos que se muestran más arriba y calcula el error relativo que cometieron, expresándolo como porcentaje y redondeándolo hasta las milésimas. A la vista de los resultados obtenidos, ¿cuál de estas aproximaciones del número π utilizarías para resolver un problema que involucrara a dicho número?

03 Aproximaciones y errores
El número pi. Errores de cálculo a lo largo de la historia

MATERIALES
Calculadora CASIO fx-82/85/350 SP X II Iberia o superior

NIVEL EDUCATIVO
3º de ESO

ORIENTACIONES DIDÁCTICAS Y TÉCNICAS
- La primera parte de la actividad es una tarea de investigación en la que los alumnos deben averiguar las diferentes aproximaciones del número π que se han propuesto a lo largo de la historia para poder analizar después los errores de las correspondientes aproximaciones.

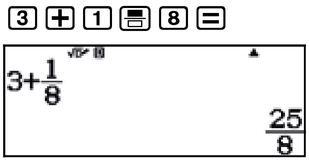
EJEMPLO DE SOLUCIÓN

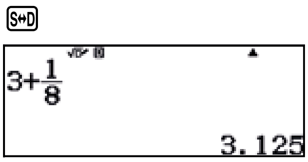
4

Se sugiere restar a π el valor que se muestra en pantalla.

6

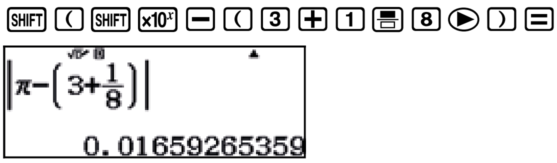
A modo de ejemplo se calcula la expresión decimal de la aproximación del número π de los sumerios:





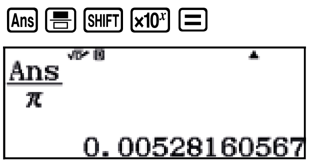
El error absoluto cometido es, por tanto:

E = Error absoluto = |Verdadero valor – Valor aproximado| = |π – (3 + 1/8)|

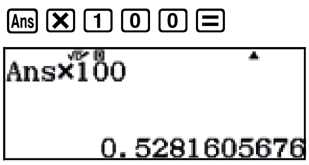


En cuanto al error relativo, se calcula como:

$$\varepsilon = \text{Error relativo} = \frac{\text{Error absoluto}}{\text{Verdadero valor}} = \frac{0{,}01659265359...}{\pi}$$



Expresando el error relativo en porcentaje, se obtiene:



Redondeando a las milésimas, resulta ε = 0,528 %.

04 | Operaciones
¿Cuánto cobran los deportistas y cómo tributan a Hacienda?

Forbes es una revista especializada en el mundo de los negocios y las finanzas que se publica en los Estados Unidos. Fue fundada en 1917 y cada año publica una serie de listas que despiertan gran interés entre los lectores; una de ellas es la lista de los deportistas mejor pagados.

En el año 2016, un futbolista encabezó la lista de los deportistas mejor pagados, por primera vez desde que empezara a publicarse esta lista. Se trataba de Cristiano Ronaldo, con unos ingresos de 88 millones de dólares anuales, de los cuales 56 millones correspondían al salario y 32 millones a los derechos de imagen.

La primera mujer aparecía en el puesto número 40. Se trataba de la tenista Serena Williams, quien acreditaba unas ganancias de 28,9 millones de dólares, de los cuales 8,9 millones correspondían a premios y 20 millones a patrocinios.

1 En España, los futbolistas deben declarar el 85 % de sus ingresos en el IRPF; el 15 % restante pueden cobrarlo como derechos de imagen a través de sociedades (siempre y cuando dichas sociedades tengan actividad). A partir del ejercicio 2016, el tipo impositivo aplicable a los contribuyentes que declaran más de 60 000 € anuales es del 45 %, y el impuesto de sociedades, del 25 %. ¿Cuánto pagó Cristiano Ronaldo en concepto de IRPF? (Expresa el resultado en euros, para ello debes averiguar cómo está el cambio con la moneda americana).

2 Los docentes de secundaria cobran una media de 24 000 € al año, con un tipo aplicable de IRPF del 30 %. ¿Cuánto debe pagar a Hacienda un docente de secundaria?

3 Analiza los resultados obtenidos en las dos actividades anteriores y compáralos. ¿Te parece justo el tipo aplicable de IRPF para estos dos trabajadores?

4 En los Estados Unidos los impuestos que se deben tributar varían según el Estado, si bien, en general las grandes fortunas aportan a las arcas públicas alrededor del 39,6 % de sus ingresos. Según este dato, ¿cuánto aporta Serena Williams a las arcas públicas?

5 Si un deportista español ha abonado 3 825 000 € en concepto de IRPF (correspondiente al 45 % de su salario) y 375 000 € en concepto de sociedades (correspondiente al 25 % de sus ingresos por derechos de imagen), ¿cuánto gana anualmente de media?

04 | Operaciones

¿Cuánto cobran los deportistas y cómo tributan a Hacienda?

MATERIALES

Calculadora CASIO fx-82/85/350 SP X II Iberia o superior

NIVEL EDUCATIVO

3º y 4º de ESO

ORIENTACIONES DIDÁCTICAS Y TÉCNICAS

- Esta actividad se plantea con el fin de trabajar la proporcionalidad y los porcentajes, así como las aplicaciones de estos contenidos a problemas del ámbito cotidiano.
- Conviene prestar especial atención al modo de configurar la calculadora en los diferentes formatos de entrada y salida de datos, accediendo mediante las teclas el menú SHIFT MENU 3 2 3.
- Para una mejor visualización de las cifras obtenidas conviene activar la opción *Separar dígitos*: SHIFT MENU ▼ ▼ 2 1.

EJEMPLO DE SOLUCIÓN

1

Cristiano Ronaldo pagó el 45 % de 56 000 000 $ en concepto de IRPF. Es decir:

45%×56000000

25 200 000

Un US dollar equivalía durante la fecha de publicación de la lista Forbes a 0,94 €, en consecuencia, la cifra anterior se expresa en euros como:

Ans×0.94

23 688 000

2

Un docente ha de pagar el 30 % de 24 000 €. Es decir:

30%×24000

7 200

3

Los alumnos han de analizar los resultados de las dos actividades anteriores y comparar los resultados valorando el concepto de impuesto progresivo.

4

Serena Williams ha de abonar a las arcas públicas el 39,6 % de sus ingresos, que ascienden a 28,9 millones de dólares.

39.6%×28900000

11 444 400

5

El salario del deportista y sus ingresos por derechos de imagen se muestran a continuación:

3825000÷45%

8 500 000

375000÷25%

1 500 000

05 | Aproximaciones y errores
¿Qué podemos saber sobre la masa del agua?

La expresión matemática que relaciona la masa (m) de un cuerpo con su densidad (ρ) y el volumen (V) que ocupa es:

$$\rho = \frac{m}{V}$$

Por otra parte, el peso (P) de un cuerpo cualquiera depende de su masa (m) y de la aceleración de la gravedad (g) según la expresión:

$$P = mg$$

La aceleración de la gravedad depende de la distancia a la superficie de la Tierra. En la superficie terrestre, la aceleración de la gravedad es g_0 = 9,80665 ms^{-2}.

1 Expresa con dos cifras decimales el valor de la aceleración de la gravedad en la superficie terrestre. ¿Qué error absoluto has cometido?

2 ¿Qué error absoluto se comete si se realiza una aproximación por truncamiento con dos cifras decimales?

3 Toma como valor de g_0 la aproximación obtenida en la actividad 1. Considera que 1 L de agua tiene una masa de 1 kg y expresa con tres cifras significativas el peso de 1 L de agua en la superficie terrestre.

4 Si se toma la densidad del agua con valor ρ = 1 g cm^{-3}, ¿qué volumen expresado en litros ocupa una gota de agua con masa m = 0,06 g? Expresa el resultado en notación científica.

5 Estima el número de gotas de agua que caben en una botella de 1 L. ¿Qué orden de aproximación has utilizado? ¿Con qué margen de error has realizado la estimación?

6 Expresa en notación científica la masa de todas las gotas de agua que caben en una botella de 1 L. ¿Cómo interpretas el resultado que has obtenido?

¿Qué podemos saber sobre la masa del agua?

MATERIALES

Calculadora CASIO fx-82/85/350 SP X II Iberia o superior

NIVEL EDUCATIVO

3º de ESO (Matemáticas Académicas)

ORIENTACIONES DIDÁCTICAS Y TÉCNICAS

- Con esta actividad se pretende que el alumno utilice el cálculo aproximado y las potencias de base 10 para realizar operaciones con números muy grandes.
- Esta actividad contribuye al desarrollo de las siguientes competencias clave del currículum: competencia digital, competencia matemática y competencias básicas en ciencia y tecnología.
- Conviene conocer previamente el valor de la aceleración de la gravedad en la superficie terrestre. Dicho valor se encuentra almacenado en la calculadora CASIO fx-570/991 SP X II, pero no en los modelos fx-82/85/350 SP X II.

EJEMPLO DE SOLUCIÓN

1

Se configura la calculadora de modo que la salida tenga dos cifras decimales.

SHIFT MENU | 3 | 1 | 2 | 9 . 8 0 6 6 5 =

```
1:Entrada/Salida
2:Unidad angular
3:Formato número
4:Result fracción
```

```
1:Fijar decimales
2:Not científica
3:Normal
```

```
1:Fijar decimales
2:Not científica
3:Normal
Fijar:Selec 0~9
```

```
9.80665
                 9.81
```

Para calcular el error absoluto, es preciso utilizar la función *valor absoluto (Abs)*, a la que se accede mediante SHIFT Simp. Antes de realizar los cálculos, conviene fijar nuevamente el número de cifras decimales a 9, tecleando SHIFT MENU 3 1 9.

El error absoluto de g_0 es el valor absoluto de la diferencia entre su valor real y su valor aproximado:

SHIFT Simp 9 . 8 0 6 6 5 − 9 . 8 1 =

```
|9.80665−9.81|
          0.003350000
```

2

Al aproximar el valor de g_0 por truncamiento a dos cifras decimales se obtiene 9,80 ms^{-2}. Por lo tanto, el error absoluto es:

SHIFT Simp 9 . 8 0 6 6 5 − 9 . 8 0 =

```
|9.80665−9.80|
          0.006650000
```

Se observa que el error es mayor cuando se realiza una aproximación por truncamiento.

3

Se toma g_0 como 9,81 ms^{-2} y se aplica la expresión para el peso, $P = mg$, aceptando que la masa de 1 L de agua es de 1 kg:

1 × 9 . 8 1 =

```
1×9.81
          9.810000000
```

La respuesta a esta actividad es P = 9,81 N, puesto que se pide expresar el resultado con tres cifras significativas.

Se puede obtener este mismo resultado configurando la calculadora para que la salida tenga 2 cifras decimales:

SHIFT MENU 3 — 1 — 2

```
1:Entrada/Salida
2:Unidad angular
3:Formato número
4:Result fracción
```

```
1:Fijar decimales
2:Not científica
3:Normal
```

```
1:Fijar decimales
2:Not científica
3:Normal
Fijar:Selec 0~9
```

Se obtiene, entonces:

```
1×9.81
                 9.81
```

4

A partir de la expresión matemática de la densidad se deduce el volumen que ocupa la masa de agua indicada:

$$\rho = \frac{m}{V} \longrightarrow V = \frac{m}{\rho}$$

Para configurar la calculadora de modo que exprese el resultado de esta operación en notación científica hay que teclear SHIFT MENU 3 2 9.

El volumen resulta ser de $6 \cdot 10^{-2}$ cm^3:

```
0.06÷1
        6.00000000×10^-2
```

A continuación se realiza la conversión a dm^3:

```
Ans×10^-3
        6.00000000×10^-5
```

5

La cantidad de gotas de agua con el volumen calculado en la actividad anterior que caben en 1 L de agua es:

```
Ans^-1
             16 666.6̅
```

Se espera que el alumno estime en 16 667 el número de gotas de agua, por lo que el orden de aproximación es de cinco cifras significativas.

6

En la actividad 4 se determinó que la masa de una gota de agua es m = 0,06 g y en la actividad 5 se ha estimado que en 1 L de agua hay 16 667 gotas.

```
0.06×16667
        1.00002000×10^3
```

Por tanto, la masa de este número de gotas de agua resulta ser m = 1 000,02 g, es decir, de poco más de 1 kg.

Problema
Sopa Mallorquina

A continuación se muestran los ingredientes necesarios para cocinar una sopa mallorquina para 4 personas.

- 300 g de lomo o solomillo de cerdo, en trozos pequeños
- 1/2 kg de cebolla tierna
- 1 cabeza de ajo
- 1 manojo de perejil
- 3 tomates
- 1 patata cortada como para hacer tortilla
- 1 col, 1 coliflor pequeña y 1 pimiento verde
- pimentón
- agua
- 250 g de pan seco
- 200 g de setas

Calcula las cantidades de cada ingrediente que son necesarias para elaborar una sopa mallorquina para 14 personas.

Para determinar las cantidades para 14 personas hay que multiplicar las cantidades por:

$\frac{14}{4} \rightarrow A$ 　 $\frac{7}{2}$

Obteniéndose por tanto estas cantidades:

Lomo

A×300 　 1 050

Cebolla

A×500 　 1 750

Cabezas de ajo

A×1 　 3.5

Manojos de perejil

A×1 　 3.5

Tomates

A×3 　 10.5

Patata

A×1 　 3.5

Col

A×1 　 3.5

Coliflor

A×1 　 3.5

Pimiento

A×1 　 3.5

Pan seco

A×250 　 875

Setas

A×200 　 700

06 | Aproximaciones y errores
El número e. Aproximación numérica

Uno de los problemas actuales que más preocupan a la sociedad es la sobreexplotación de los recursos y las terribles consecuencias que se derivan de esta práctica, como por ejemplo, la escasez de alimentos en un futuro próximo. Para analizar este problema, hay que tener en cuenta la tasa de crecimiento de la población mundial.

Para estudiar la tasa de crecimiento de una población se utiliza una expresión algebraica en la que intervienen los logaritmos naturales, que son aquellos que tienen como base el número e.

En esta actividad vamos a acercarnos a este número tan presente en la naturaleza y a su vez tan poco conocido.

1 Calcula el valor numérico de la expresión algebraica $\left(1+\frac{1}{n}\right)^n$, donde n es un número natural, para valores de n muy grandes. Organiza los resultados que obtengas en una tabla y pon en común los resultados que obtengas con los de tus compañeros.

2 Aunque habitualmente se recomienda trabajar con dos cifras decimales, deberás tomar más cifras decimales para diferenciar los resultados que corresponden a diferentes valores de n. Vuelve a realizar los cálculos del apartado anterior asegurándote que obtienes resultados distintos para diferentes valores de n. ¿Coincide alguno de los resultados que has hallado con los de algún compañero? ¿Qué resultados se repiten? ¿Qué valores de n se han introducido en la calculadora?

3 ¿Cuál es valor de n más grande que admite la calculadora tal que el valor numérico de la expresión algebraica $\left(1+\frac{1}{n}\right)^n$ es diferente de 1?

Nota: Cuanto mayor sea n más se aproximará el valor numérico de la expresión algebraica $\left(1+\frac{1}{n}\right)^n$ a un número fijo: el número e. Puedes obtener un valor muy aproximado a e (tanto como tu calculadora te permite) mediante la combinación de teclas ALPHA $\times 10^x$.

4 Vuelve a elaborar una tabla con los valores numéricos de la expresión $\left(1+\frac{1}{n}\right)^n$ para los valores más altos posibles de n. Pon en común tus resultados con los de tus compañeros.

5 En algunos casos habrás obtenido resultados expresados en notación científica. Expresa dichos resultados en notación decimal. ¿Para qué valor de n has obtenido el menor resultado en el apartado anterior? ¿En cuántas cifras decimales coincide el valor de la expresión algebraica con el valor real del número e?

Nota: Como bien sabes, el número π es un número irracional, es decir, un número decimal con infinitas cifras no periódicas que no puede expresarse como cociente de dos números enteros. Son números irracionales π, raíz de 2, raíz de 5... y también el número e. Solo falta por conocer el número imaginario i de la famosa identidad de Euler $e^{i\pi}+1=0$.

El número *e*. Aproximación numérica

MATERIALES
Calculadora CASIO fx-570/991 SP X II Iberia

NIVEL EDUCATIVO
4º de ESO

ORIENTACIONES DIDÁCTICAS Y TÉCNICAS

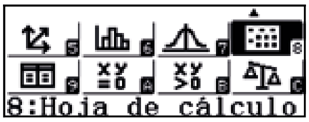
- En estas actividades se trabaja el cálculo del valor numérico de una expresión algebraica y se justifica la importancia del número e en la vida cotidiana, a la vez que se calcula una aproximación de su valor numérico.
- La actividad 1 puede suscitar una discusión sobre qué se considera un número grande, en función del nivel en el que se esté trabajando.
- En la actividad 4 se puede analizar qué parte de la expresión algebraica es la que da como resultado 1, en lugar de una correcta aproximación del número e. Se puede aprovechar la actividad para analizar los casos en los que no resulta adecuado el uso de la notación científica.
- En la actividad 6 se pueden estudiar, a modo de ampliación, los conceptos de crecimiento y límite de una sucesión.

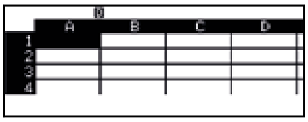
EJEMPLO DE SOLUCIÓN

1

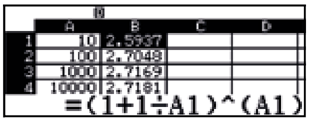
Para realizar esta actividad, se accede al menú *Hoja de cálculo*, al que se accede mediante:

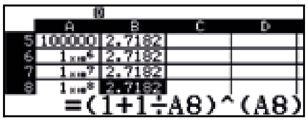
[MENU] [8]

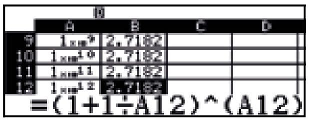




En la columna A se introducen valores altos de n, y en la celda B1, la fórmula **(1 + 1:A1)^A1**, que se extiende en el rango deseado de la columna B. Se obtiene, así, una tabla como la siguiente:





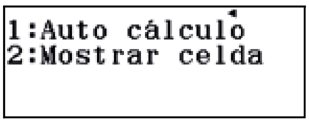


Como se observa, los resultados se presentan con solo 4 cifras decimales y parecen tender al valor 2,7182.

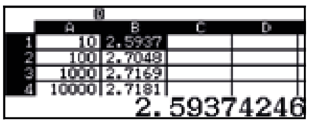
2

Al colocar el cursor en las celdas de la columna B aparece la fórmula que proporciona los resultados contenidos en estas celdas, pero no los propios resultados. Para que se visualicen, con más cifras decimales de las que se muestran en la tabla, hay que modificar la configuración de la calculadora:

[SHIFT] [MENU] [▼] [4] [2] [2]

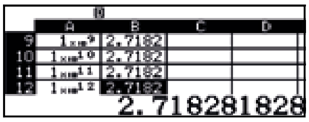


Ahora se muestran los valores numéricos contenidos en las celdas:



Se observa que el último valor de n para el que se obtiene un resultado distinto al de las celdas precedentes es $n = 1 \cdot 10^{10}$, al que le corresponde el valor 2,718281828.

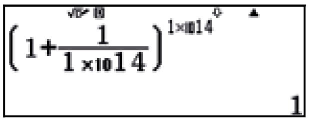
El número *e*. Aproximación numérica



Es por ello que, con toda seguridad, los alumnos habrán obtenido en múltiples ocasiones el resultado 2,718281828.

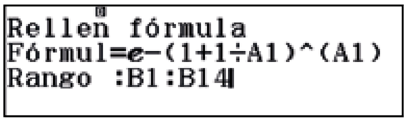
3

A partir de $n = 1 \cdot 10^{13}$ el valor numérico de la expresión algebraica $\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$ es 1.

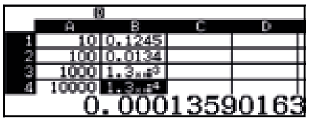


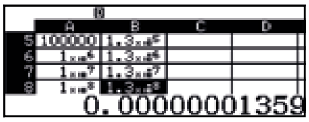
4

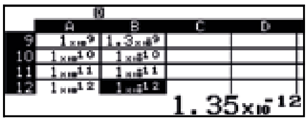
En esta ocasión, hay que introducir en la casilla B1 la fórmula *e*−(1+1:A1)^A1 y extenderla al rango de la columna B que se considere apropiado:

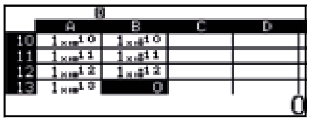


Se obtiene, así, una lista de valores como la siguiente:









5

El menor resultado se obtiene para $n = 1 \cdot 10^{12}$, alcanzando el valor $1 \cdot 10^{-12}$, es decir, 0,0000000000012 (para $n = 1 \cdot 10^{13}$ se obtiene 0).

Esto significa que cuando $n = 1 \cdot 10^{12}$ el valor numérico de la expresión algebraica $\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$ coincide en 11 cifras con el valor de *e*.

Problema

Pavo al horno

Existe un conocido truco que permite obtener un pavo particularmente suave y jugoso. El truco consiste en envolver el pavo en papel de aluminio y hornearlo durante 90 minutos, añadiendo 15 minutos por cada kilogramo de pavo. ¿Cuánto tiempo de horneado requiere un pavo de 5 kg? ¿Y un pavo de 6,5 kg?

Completa la siguiente tabla:

Peso (kg)	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
Tiempo (min)	90										

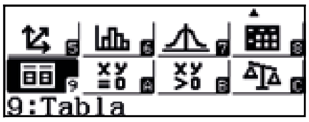
La expresión que proporciona el tiempo de horneado en función del peso del pavo es la siguiente:

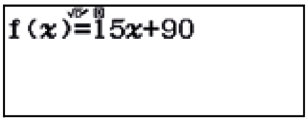
$$\textit{Tiempo de horneado} = 15x + 90$$

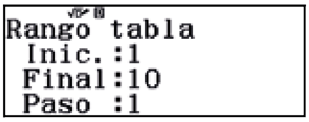
En esta expresión x es el peso del pavo expresado en kilogramos.

Para evaluar la expresión hay que acudir al menú *Tabla*.

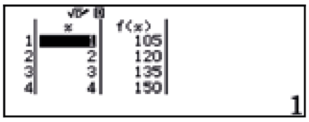
MENU 9

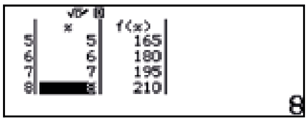


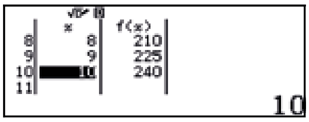




Se elige como valor de inicio 1, como valor final 10 y como paso 1, y se obtiene la siguiente tabla de valores:

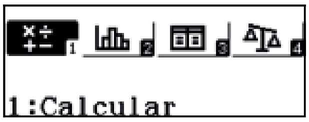


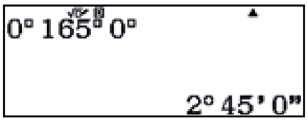




Como se observa, un pavo de 5 kg requiere 165 minutos de horneado. La tecla °'" permite obtener las horas y los minutos:

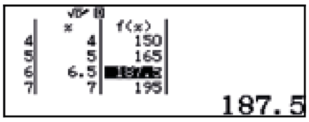
MENU 1 　 0 °'" 1 6 5 °'" 0 °'" =





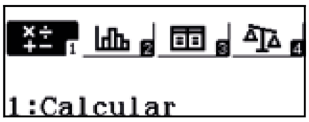
Es decir, 2 horas y 45 minutos

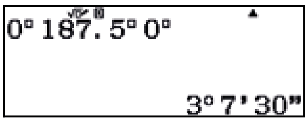
Para determinar el tiempo de horneado para un pavo de 6,5 kg, se puede sobrescribir uno de los valores de la tabla:



Como en el caso anterior, este resultado puede expresarse en horas y minutos:

MENU 1 　 0 °'" 1 8 7 . 5 °'" 0 °'" =





Es decir, 3 horas, 7 minutos y 30 segundos.

07 | Divisibilidad

¿Qué día de la semana es un día cualquiera del año?

1 El año 2016 fue un año bisiesto, lo que significa que el mes de febrero tuvo 29 días. El día 31 de diciembre de 2015, cayó en jueves.

a) ¿En qué día de la semana cayó el 19 de marzo de 2016?

b) ¿En qué día de la semana cayó el 25 de diciembre de 2016?

c) ¿En qué día de la semana cayó tu cumpleaños?

2 El 25 de abril del año 2015 cayó en sábado.

a) ¿En qué día de la semana cayó el 11 de septiembre de 2015?

b) ¿En qué día de la semana cayó el 1 de enero de 2015?

3 Existe un método para determinar en qué día de la semana cae un día cualquiera del año. Para ello se calcula el resto de dividir entre 7 la siguiente expresión (correspondiendo al lunes el resto igual a 1):

$$A + \text{int}\left(\frac{5}{4}B\right) + C + D + E$$

En esta expresión:

- **A** hace referencia al siglo según la tabla adjunta.

Siglo	1700-1799	1800-1899	1900-1999	2000-2099	2100-2199
A	5	3	1	0	-2

- **B** son las dos últimas cifras del año.
- $\text{int}\left(\frac{5}{4}B\right)$ es el resultado sin decimales de $\frac{5}{4}B$.
- **C** toma el valor –1 si el año es bisiesto y 0 en caso contrario.
- **D** es el mes del año según la tabla adjunta.

Mes	Enero	Febrero	Marzo	Abril	Mayo	Junio
D	6	2	2	5	0	3
Mes	Julio	Agosto	Septiembre	Octubre	Noviembre	Diciembre
D	5	1	4	6	2	4

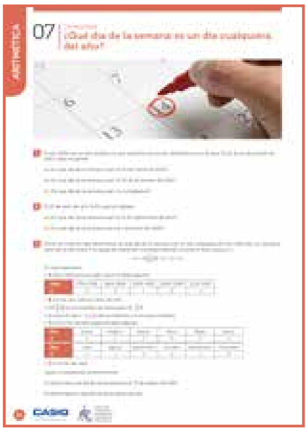
- **E** es el día del mes.

Según lo expresado anteriormente:

a) Determina qué día de la semana fue el 13 de marzo del 1961.

b) Determina en qué día de la semana naciste.

07 | Divisibilidad
¿Qué día de la semana es un día cualquiera del año?



MATERIALES
Calculadora CASIO fx-570/991 SP X II Iberia

NIVEL EDUCATIVO
3º y 4º de ESO

ORIENTACIONES DIDÁCTICAS Y TÉCNICAS
- Esta actividad se plantea con el fin de trabajar la división natural.
- La tercera actividad puede servir para profundizar en el estudio del valor numérico de una expresión polinómica de varias variables.
- Para desarrollar las dos primeras actividades se hace uso de la función división natural, a la que se accede mediante [ALPHA] [÷].
- La tercera actividad se desarrolla haciendo uso de la función *CALC*.

EJEMPLO DE SOLUCIÓN

1

a) En primer lugar se calculan los días que han transcurrido desde el 31 de diciembre hasta el 19 de marzo: 31 + 29 + 19

[3] [1] [+] [2] [9] [+] [1] [9] [=]

```
31+29+19
                 79
```

Seguidamente, se considera que los días de la semana se repiten de 7 en 7 y se divide el número de días transcurridos entre 7:

[Ans] [ALPHA] [÷] [7] [=]

```
Ans⌞7
          C=11, R=2
```

El resto de la división es 2, en consecuencia, el día de la semana en que cayó el 19 de marzo coincide con el día en que cayó el 2 de enero, es decir, en sábado.

b) El 25 de diciembre faltaban 6 días para que finalizase el año. En consecuencia, los días transcurridos son: 366 – 6 = 360

[3] [6] [6] [−] [6] [=]

```
366−6
                360
```

Se divide esta cifra entre 7 y se considera el resto:

[Ans] [ALPHA] [÷] [7] [=]

```
Ans⌞7
          C=51, R=3
```

El resto es 3, por tanto, el día de la semana en que cayó el 25 de diciembre coincide con el día de la semana en que cayó el 3 de enero, es decir, en domingo.

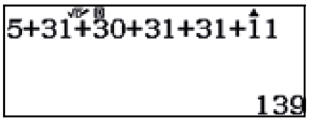
c) Respuesta abierta.

07 Divisibilidad
¿Qué día de la semana es un día cualquiera del año?

2

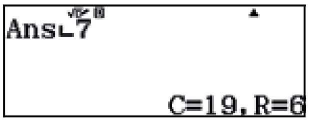
a) En primer lugar se calcula el número de días que han transcurrido desde el 25 de abril hasta el 11 de septiembre, teniendo en cuenta que el 2015 no es un año bisiesto:

[5] [+] [3] [1] [+] [3] [0] [+] [3] [1] [+] [3] [1] [+] [1] [1]



Seguidamente se divide esta cifra entre 7 y se considera el resto:

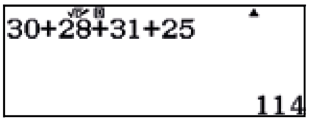
[Ans] [ALPHA] [$\frac{\square}{\square}$] [7] [=]



El resto de la división es 6, por tanto, el día de la semana en que cayó el 11 de septiembre es el mismo que el día de la semana en que cayó el 1 de mayo (6 días más tarde que el 25 de abril), es decir, en viernes.

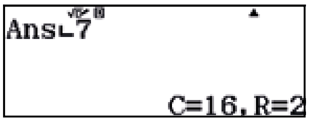
b) Se procede análogamente al apartado anterior y se cuenta el número de días transcurridos hasta el 25 de abril.

[3] [0] [+] [2] [8] [+] [3] [1] [+] [2] [5] [=]



Se divide esta cifra entre 7 y se considera el resto:

[Ans] [ALPHA] [$\frac{\square}{\square}$] [7] [=]

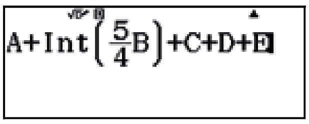


Por tanto, el día de la semana en que cayó el 1 de enero coincide con el día en que cayó el 23 de abril (2 días antes del 25 de abril), es decir, en jueves.

3

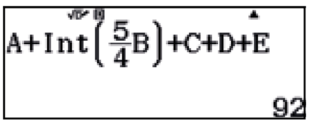
Se introduce la fórmula que proporciona el día de la semana, haciendo uso de las variables que proporciona la calculadora:

[ALPHA] [(−)] [+] [ALPHA] [+] [$\frac{\square}{\square}$] [5] [▼] [4] [▶] [ALPHA] [°'''] [)] [+] [ALPHA] [x^{-1}] [+] [ALPHA] [sen] [+] [ALPHA] [cos]



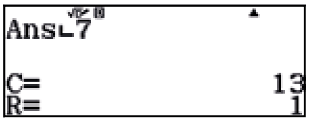
Una vez introducida la expresión algebraica, se determina su valor numérico para A = 1, B = 61, C = 0, D = 2 y E = 13, utilizando la función *CALC*.

[CALC] [1] [=] [6] [1] [=] [0] [=] [2] [=] [1] [3] [=] [=]



Se calcula, ahora, el resto de dividir 92 entre 7:

Ans ALPHA ⌞ 7 =



El resto de la división es 1, por tanto, el día 13 de marzo de 1961 cayó en lunes.

Nota:
En la calculadora se distinguen dos funciones:
- Int. Proporciona el número entero, sin la coma: Int(3.2) = 3, Int(-3.2) = -3.
- Intg. Proporciona la parte entera: Intg(3.2) = 3, Intg(-3.2) = -4.

Ampliación

1 Busca por internet un *calendario perpetuo*. Observarás que es un conjunto de datos ordenados en tres tablas, una para los años, otra para los meses y otra para los días. A partir de unas operaciones sencillas con los datos de las tablas anteriores podrás conocer que día de la semana es un día de cualquier año. Es posible también encontrar estos calendarios en las primeras páginas de las agendas convencionales de papel.

Intenta relacionar los cálculos que se efectúan a partir del calendario perpetuo con las operaciones indicadas en la actividad 3.

08 | Expresión decimal de fracciones
¿Cúal es el *Gemelier* más guapo?

El Estadio Vicente Calderón acogió el pasado mes de agosto uno de los conciertos que ofrecieron los *Gemeliers* durante su gira veraniega. La prensa se hizo eco del acontecimiento musical y publicó una serie de informaciones sobre el estadio y los asistentes al concierto.

- El Estadio Vicente Calderón tiene un aforo de 54 400 espectadores sentados y 5 000 espectadores de pie.
- El campo se llenó prácticamente por completo durante el concierto.
- Sólo el 13 % de los asistentes al concierto compró su entrada en la taquilla.
- El $62{,}\widehat{481}$ % de los asistentes era menor de 17 años.

Una publicación dirigida al público adolescente realizó una encuesta a la salida del concierto en la que se preguntaba a los asistentes por cuál consideran que es el *Gemelier* más guapo. Estos son algunos de los resultados de la encuesta:

- El 100 % de los asistentes al concierto respondieron a la encuesta.
- El $35{,}\widehat{76}$ % de los votos indicaron que el *Gemelier* más guapo es Jesús.
- Algunos de los asistentes no se pudieron decidir por ninguno de los dos.
- 21 128 asistentes votaron por Daniel.

Todos los porcentajes del enunciado se han calculado dividiendo el número de personas que reúnen una determinada característica por el número total de asistentes, y multiplicando el resultado obtenido por 100.

1 Expresa los porcentajes que se mencionan en el enunciado en forma de fracción y compáralos.

2 ¿Cuántos votos recibió Jesús?

08 | Expresión decimal de fracciones
¿Cúal es el *Gemelier* más guapo?

MATERIALES
Calculadora CASIO fx-82/85/350 SP X II Iberia

NIVEL EDUCATIVO
1º de ESO

ORIENTACIONES DIDÁCTICAS Y TÉCNICAS
- Si los alumnos no son capaces de interpretar la pista que se proporciona al final del enunciado, el profesor puede guiarles para que encuentren las fracciones generatrices y, posteriormente, el mínimo común múltiplo de los denominadores que resultan. Los votantes de Daniel sólo sirven para realizar la comparación final, una vez calculado el número de votantes de Jesús.
- El cálculo de la fracción generatriz es inmediato en las actuales calculadoras CASIO, así como la descomposición factorial de cualquier número. Para hallar la fracción generatriz de un número decimal periódico, hay que introducir tantas cifras del periodo como dígitos quepan en la calculadora. También puede introducirse el periodo usando la combinación de teclas ALPHA $\sqrt{\blacksquare}$.

EJEMPLO DE SOLUCIÓN

1

Una manera de comparar las cantidades consiste en encontrar las fracciones generatrices que corresponden a cada cifra porcentual. La calculadora interpreta las cantidades expresadas en % como fracciones de denominador 100, que simplifica directamente:

13% → $\frac{13}{100}$

62.$\overline{481}$% → $\frac{1687}{2700}$

35.$\overline{76}$% → $\frac{3541}{9900}$

Para comparar las fracciones, conviene hallar las correspondientes fracciones equivalentes con denominador común. Para ello se debe calcular el MCM de los denominadores.

MCM(100,MCM(2700,9900)) → 29 700

Las fracciones equivalentes son:

$\frac{3861}{29700}$ → $\frac{13}{100}$

$\frac{18557}{29700}$ → $\frac{1687}{2700}$

$\frac{10623}{29700}$ → $\frac{3541}{9900}$

2

El número de personas que asistieron al concierto es la suma de los espectadores sentados y los espectadores de pie, es decir:

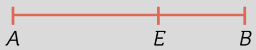
54400+5000 → 59 400

En consecuencia, el número de votos que recibió Jesús es:

35.$\overline{76}$%×Ans → 21 246

09 | Identificación tipo de números
Propiedades numéricas del número de oro

Sea un segmento $\overline{AB}$ y un punto interior E que lo divide en dos segmentos $\overline{AE}$ y $\overline{EB}$. Se dice que el punto E divide el segmento $\overline{AB}$ en proporción áurea (o en media y extrema razón) si se cumple que:



$$\frac{\overline{AB}}{\overline{AE}} = \frac{\overline{AE}}{\overline{EB}} = \Phi$$

La razón de proporcionalidad Φ se conoce como **número de oro** o **número áureo.**

Para realizar la división áurea de un segmento $\overline{AB}$ se procede de la siguiente manera:

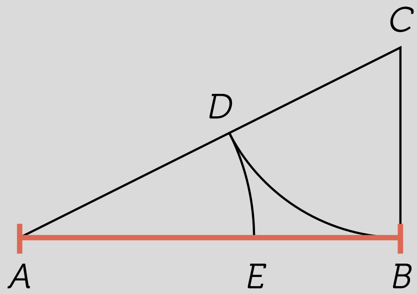
1. Se dibuja el segmento $\overline{BC}$ perpendicular a $\overline{AB}$ tal que $\overline{BC} = \frac{1}{2}\overline{AB}$.

2. Se dibuja el segmento $\overline{AC}$.

3. Se traza desde C un arco de radio $\overline{BC}$ y se marca el punto de intersección D con el segmento $\overline{AC}$.

4. Se traza un arco desde A de radio $\overline{AD}$ y se considera el punto de intersección, E, con el segmento $\overline{AB}$.

Se puede comprobar que $\frac{\overline{AB}}{\overline{AE}} = \frac{\overline{AE}}{\overline{EB}} = \Phi$, con $\Phi = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$.



Demuestra las siguientes propiedades del número de oro:

1 Es la solución positiva de la ecuación cuadrática $x^2 - x - 1 = 0$.

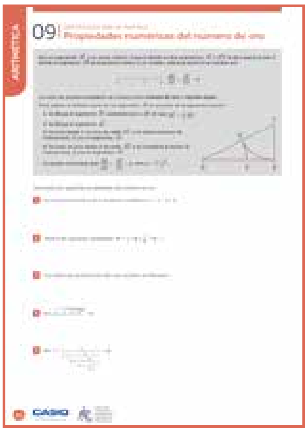
2 Verifica las siguientes igualdades: $\Phi^2 = 1 + \Phi$ y $\frac{1}{\Phi} = \Phi - 1$.

3 Sus potencias sucesivas forman una sucesión de Fibonacci.

4 $\lim \sqrt{1+\sqrt{1+\sqrt{1+\sqrt{1...}}}} = \Phi$

5 $\lim 1 + \cfrac{1}{1+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{1+...}}}} = \Phi$

09 | Identificación tipo de números
Propiedades numéricas del número de oro



MATERIALES
Calculadora CASIO fx-570/991 SP X II Iberia

NIVEL EDUCATIVO
3º de ESO

ORIENTACIONES DIDÁCTICAS Y TÉCNICAS

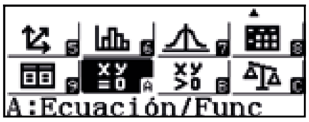
- Esta actividad se plantea con el fin de trabajar los números irracionales y los radicales, así como las ecuaciones de segundo grado.
- Conviene prestar especial atención al modo de usar las diferentes memorias de la calculadora, así como los modos de aplicación *Ecuación/Función* y *Verificar*.

EJEMPLO DE SOLUCIÓN

1

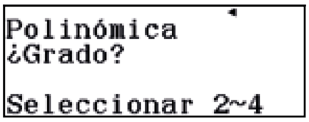
Se accede al menú *Ecuación/Función* y se selecciona la opción correspondiente a las ecuaciones polinómicas. Seguidamente, se selecciona el grado 2.

MENU (−)



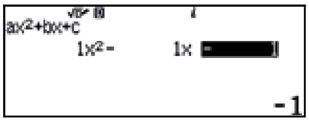
2

2

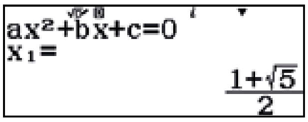


A continuación se introducen los coeficientes y se resuelve la ecuación de segundo grado:

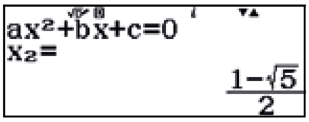
1 = (−) 1 = (−) 1 =



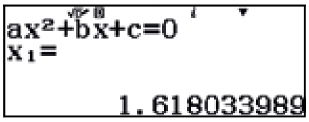
=

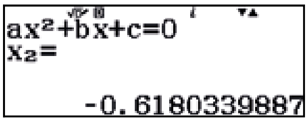


=



Para obtener las expresiones decimales de las soluciones se presiona S⇔D.

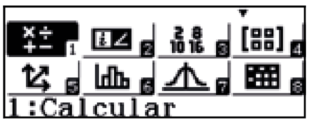




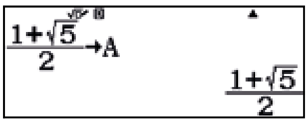
2

Se accede al menú *Calcular* y se almacena el valor numérico del número de oro en una variable, por ejemplo, en A:

MENU 1

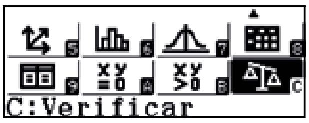


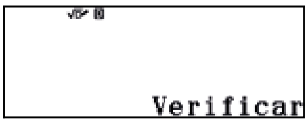
⊟ 1 + √■ 5 ▼ 2 STO (−)



A continuación se accede al menú *Verificar*.

MENU x

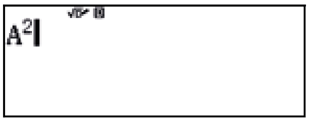


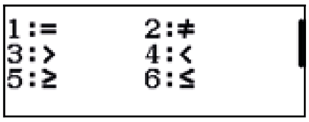


Propiedades numéricas del número de oro

Se comprueba la veracidad de la igualdad $A^2 = A + 1$:

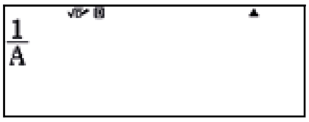
ALPHA (–) x^2 OPTN 1   ALPHA (–) + 1 =

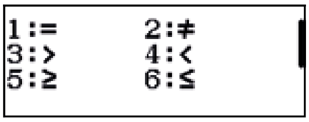




Para demostrar la igualdad $\frac{1}{A} = A - 1$ se procede análogamente:

▭ 1 ▼ ALPHA (–) ▶   OPTN 1   ALPHA (–) – 1 =





3

Una vez se ha demostrado que $\Phi^2 = 1 + \Phi$, es fácil ver que las potencias del número de oro forman una sucesión de Fibonacci, es decir, cada término resulta de la suma de los dos términos anteriores.

Φ

$\Phi^2 = 1 + \Phi$

$\Phi^3 = \Phi^2 \cdot \Phi = (1 + \Phi) \cdot \Phi = \Phi + \Phi^2$

$\Phi^4 = \Phi^3 \cdot \Phi = (\Phi \cdot \Phi^2) \cdot \Phi = \Phi^2 + \Phi^3$

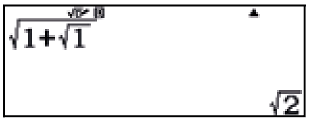
...

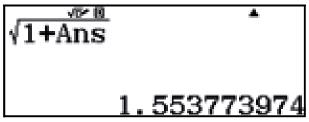
$\Phi^n = \Phi^{n-2} + \Phi^{n-1}$

4

Para comprobar que lím $\sqrt{1+\sqrt{1+\sqrt{1+\sqrt{1...}}}} = \Phi$ se procede a realizar el siguiente cálculo recursivo:

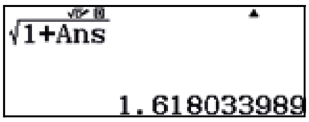
√▭ 1 + √▭ 1 =   √▭ 1 + Ans =





Se repite el procedimiento y se observa como el resultado se aproxima, cada vez más, al número de oro:

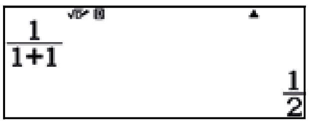
= = = = = = = = = = = = = = = = = =

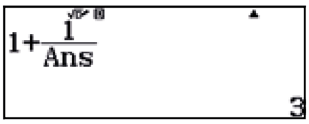


5

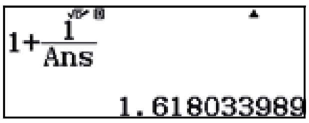
Para comprobar que la expresión tiende al número de oro se realiza un cálculo recursivo análogo al del apartado anterior.

1 ▭ 1 + 1 =   1 + ▭ 1 ▼ Ans





= = = = = = = = = = = = = = = = = =

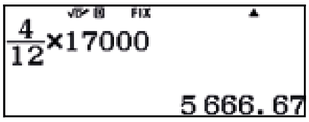


Problema

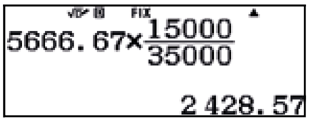
Reparto proporcional

Dos socios fundaron una empresa, de manera que el primero aportó 15 000 € y el segundo 20 000 €. Cuatro meses después, el primer socio retiró 4 000 € y el segundo 6 000 €. Un año después, obtuvieron 17 000 € de ganancias. ¿Cómo se repartieron esta cantidad en proporción al dinero invertido y al tiempo transcurrido?

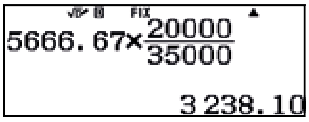
Dado que al cabo de un año obtuvieron 17 000 € de ganancias, al cabo de 4 meses les correspondieron unas ganancias de:



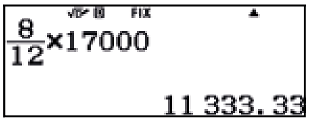
Se tienen que repartir 5 666,67 € de manera directamente proporcional a la cantidad invertida. En consecuencia, al que aporta 15 000 € le corresponden:



Al socio que aporta 20 000 € le corresponden:



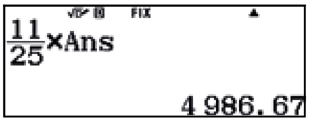
Durante los 8 restantes meses del año deberán repartirse:



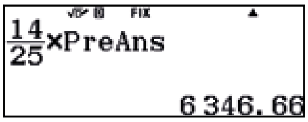
El primer socio tenía invertida una cantidad de 11 000 €, y el segundo, una cantidad de 14 000 €, lo que suponía un total de 25 000 €.

Así, pues, durante los 8 meses restantes se tienen que repartir 11 333,33 € de la siguiente manera:

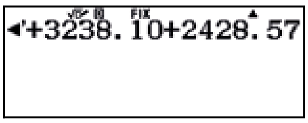
Para el primer socio:

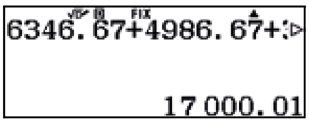


Para el segundo socio:



Se suman ahora todas las cantidades y se comprueba que el dinero obtenido asciende a 17 000 €.





10 | Identificación tipo de números
Números primos de Mersenne

Los números de Mersenne son aquellos que resultan de restar una unidad a una potencia de 2; es decir:

$$M_n = 2^n - 1$$

Un número, M_n, es un primo de Mersenne si cumple las siguientes tres condiciones:

- Es un número de Mersenne, es decir, $M_n = 2^n - 1$.
- M_n es un número primo.
- n es un número primo.

1 ¿Cuál es el mayor número de Mersenne que puede obtenerse en la calculadora con todas sus cifras a la vista?

Nota: Recuerda que un número en notación científica sólo muestra unas cuantas cifras significativas en su parte decimal, por lo que no resulta conveniente en esta actividad.

2 ¿Son M_7 y M_{11} números primos de Mersene?

3 ¿Cuál es el mayor número primo de Mersenne que puede obtenerse en la calculadora con todas sus cifras a la vista?

4 ¿Cuántas cifras tiene el último número primo de Mersenne, $M_{74\,207\,281}$, descubierto en enero de 2016? Se trata del 49º (cuadragésimo noveno) número primo de Mersenne.

Números primos de Mersenne

MATERIALES

Calculadora CASIO fx-570/991 SP X II Iberia

NIVEL EDUCATIVO

3º de ESO

ORIENTACIONES DIDÁCTICAS Y TÉCNICAS

- Esta actividad puede utilizarse para repasar las funciones exponenciales, así como la factorización de números.
- Cuando una celda de la hoja de cálculo contiene un número de más de 6 cifras, dicho número aparece expresado en notación científica, con lo que se dejan de visualizar algunas de sus cifras. Si se desea visualizar todas las cifras, es necesario colocar el cursor encima de la celda y configurar la calculadora de manera que la parte inferior de la pantalla muestre, en vez de la fórmula (configuración por defecto), el valor de la celda. Para hacerlo hay que proceder del siguiente modo:

SHIFT MENU ▼

```
1:Entrada/Salida
2:Unidad angular
3:Formato número
4:Símb ingeniería
```

4

```
1:Result fracción
2:Complejos
3:Estadística
4:Hoja de cálculo
```

2

```
1:Auto cálculo
2:Mostrar celda
```

2

```
1:Fórmula
2:Valor
```

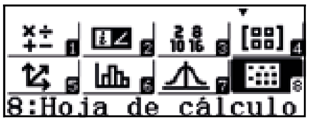
En el menú *Tabla* sucede como en el menú *Hoja de cálculo*: los números de más de seis cifras aparecen en la tabla expresados en notación científica.

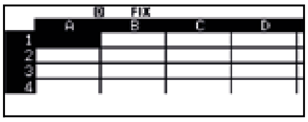
EJEMPLO DE SOLUCIÓN

1

Para resolver esta actividad, puede usarse la hoja de cálculo que ofrece la calculadora. Se accede a ella mediante:

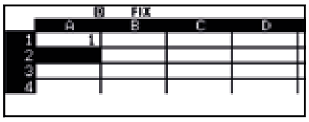
MENU 8





Seguidamente, se escriben los 20 primeros números de Mersenne. Para ello, se introduce 1 en la primera celda de la primera fila y, seguidamente, se aplica la fórmula A1 + 1 a toda esa fila:

1

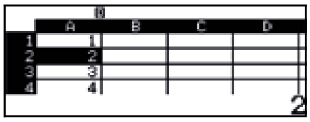


OPTN 1

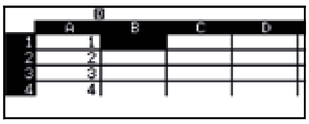
```
1:Rellen fórmula
2:Rellenar valor
3:Editar celda
4:Espacio libre
```

ALPHA (−) 1 + 1 =

```
Rellen fórmula
Fórmul=A1+1
Rango :A1:A20
```



En la primera celda de la segunda columna se introduce la fórmula 2^A1-1 y se extiende al rango A1:A20.



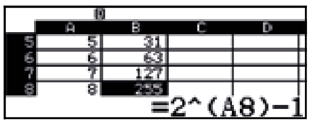
OPTN 1

```
1:Rellen fórmula
2:Rellenar valor
3:Editar celda
4:Espacio libre
```

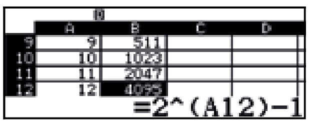
2 $x^{\blacksquare}$ ALPHA (−) 1 =

```
Rellen fórmula
Fórmul=2^(A1)−1
Rango :B1÷B20
```

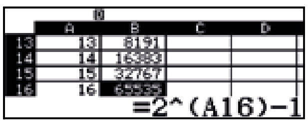
▼

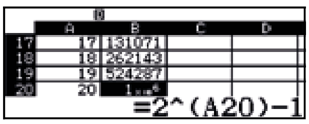


▼



▼



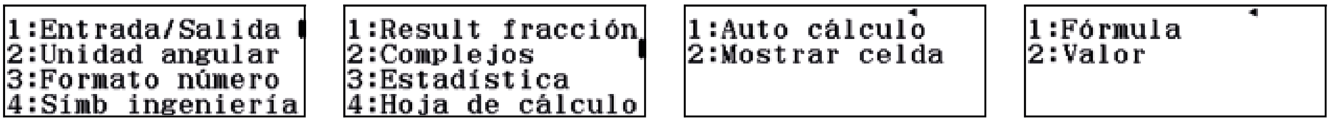


Las celdas de la hoja de cálculo sólo muestran 6 cifras, de manera que el último número de Marsenne que tiene todas las cifras a la vista es el decimonoveno.

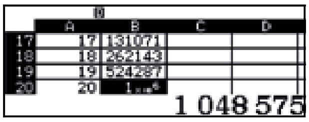
10 | Identificación tipo de números
Números primos de Mersenne

En realidad, es posible observar todas las cifras del número vigésimo en la hoja de cálculo. Para hacerlo, hay que configurar la calculadora de modo que muestre el valor numérico de las celdas, y no las fórmulas correspondientes.

[SHIFT] [MENU] [▼] [4] [2] [2]

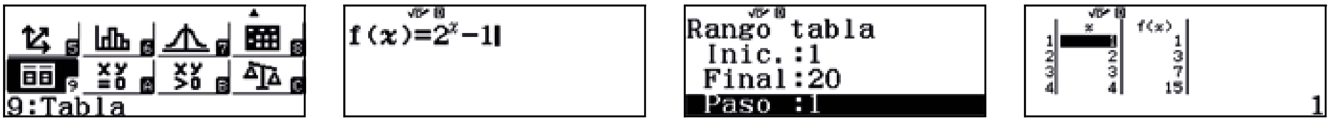


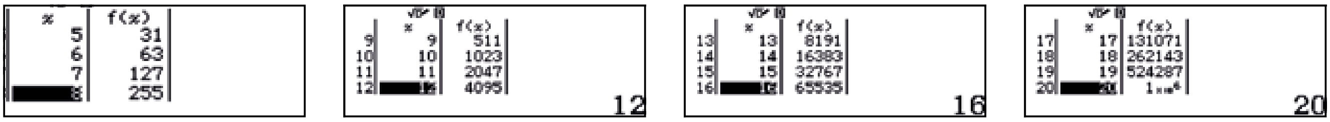
Ahora, la calculadora muestra el valor numérico completo del vigésimo número de Mersenne con solo colocar el cursor encima de la celda.



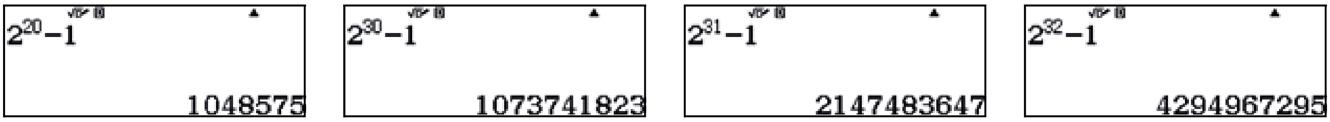
Esta actividad también puede realizarse utilizando tablas. Como se observa, se obtienen los mismos resultados que al usar la hoja de cálculo.

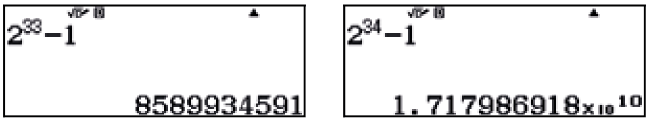
[MENU] [9] [2] [$x^{\blacksquare}$] [x] [▶] [−] [1] [=]





También puede usarse el menú *Calcular*:



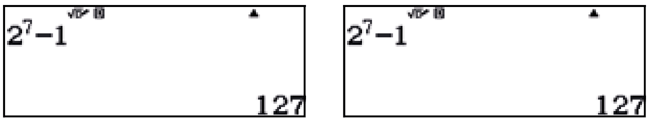


Como se observa, el mayor número de Mersenne que se puede obtener es: $M_{33} = 2^{33} - 1 = 8\,589\,934\,591$

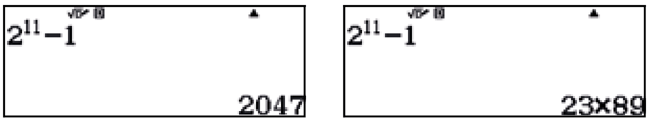
2

Para saber si son números primos, hay que factorizarlos:

[2] [$x^{\blacksquare}$] [7] [▶] [−] [1] [=] [ALPHA] [°'''] [=]



[2] [$x^{\blacksquare}$] [1] [1] [▶] [−] [1] [=] [ALPHA] [°'''] [=]



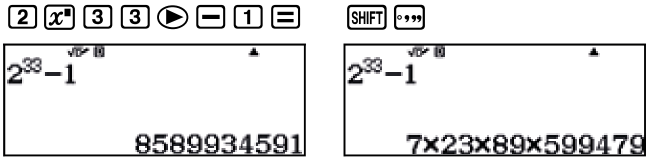
De los resultados anteriores se concluye que 127 es el cuarto primo de Mersenne (compruébese para $n = 2, 3, 5$) y que 2 047 no es primo de Mersenne.

Números primos de Mersenne

3

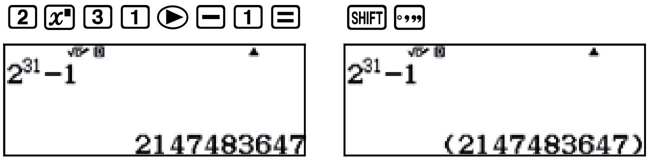
En la actividad 1 se ha visto que el mayor número de Mersenne que se puede obtener en esta calculadora es $M_{33} = 2^{33} - 1 = 8\,589\,934\,591$.

33 no es un número primo y tampoco M_{33} como podemos comprobar:



Por tanto, M_{33} no es un número primo de Mersenne.

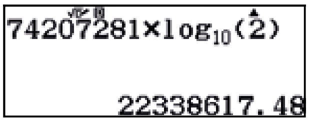
Probamos con $n = 31$.



En consecuencia, M_{31} es el octavo número primo de Mersenne, siendo el mayor que puede mostrarse por la calculadora con todas sus cifras.

4

Para conocer el número de cifras, se puede calcular el logaritmo decimal de $2^{7\,4207\,281}$.



Es decir, el cuadragésimo noveno primo de Mersenne tiene 22 338 618 (veintidós millones trescientas treinta y ocho mil seiscientas dieciocho) cifras.

11 | Logaritmos
Número de cifras de un número "muy grande"

1262383049660586222684174870651169998454847760535761095005091
6182626818413620269880155156801376138071753405453485116413864
8904527031605516052768809525956360593996436471601951598338820
9962459578542172100149933776393858121960407273342250718005600
9672540900795541095168165737795933263322883148732515590778530
6844497786480339196258080068276001784958928193764231021494476
2837569186221071720202524163030311855918867830431407694380169
2528246980959705901641444238894928620825482303431806955690226
3087734268295039009305293951812087395919671958415360531431457
753070505943288810775531682015477 75

En ocasiones, puede resultar interesante conocer el número de cifras que tiene el resultado de una operación, sin necesidad de conocer cuál es ese resultado. Una manera de hacerlo, es utilizar los logaritmos, como verás a continuación.

Utiliza la calculadora para dar respuesta a las siguientes preguntas:

1 ¿Cuántas cifras tiene el número 2^{33}?

2 ¿Cuántas cifras tiene el número 2^{34}?

3 ¿Cuántas cifras tienen los números 2^{300} y 2^{332}?

4 ¿Cuántas cifras tiene el número 2^{333}? ¿Qué sucede cuando intentas responder a esta pregunta usando la calculadora?

5 Para responder a la cuestión anterior, calcula los logaritmos decimales de los siguientes números:

2, 3, 31, 45, 405, 607, 1 234, 5 678, 12 345, 67 890, 12 3456, 789 012

Observa la parte entera de cada logaritmo. ¿Qué puedes deducir?

6 Aplica tus deducciones y resuelve nuevamente la actividad 3 pero de distinta forma.

7 Intenta resolver la actividad 4 por el mismo método. ¿Qué observas?

8 ¿Conoces alguna propiedad de los logaritmos que pueda solventar el error que indica la calculadora en la actividad 7?

9 A partir de las conclusiones que extraigas en la actividad 7, deduce cuántas cifras tiene el número 2^{333}.

11 | Logaritmos
Número de cifras de un número “muy grande”

MATERIALES
Calculadora CASIO fx-570/991 SP X II Iberia

NIVEL EDUCATIVO
4º de ESO

ORIENTACIONES DIDÁCTICAS Y TÉCNICAS
- El alumnado deberá conocer, previamente a la realización de esta práctica, conceptos básicos de notación científica.
- El alumno debe conocer el concepto de logaritmo y sus propiedades básicas.

EJEMPLO DE SOLUCIÓN

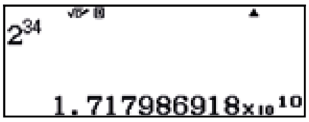
1

Se realiza la operación y se cuentan las cifras:

El número tiene 10 cifras.

2

Se procede de manera análoga a la actividad anterior:



El número tiene 11 cifras. Se cuenta la cifra entera (de un solo dígito, ya que el resultado se muestra en notación científica) más las 10 posiciones que indican el exponente 10.

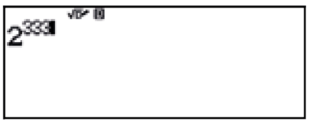
3

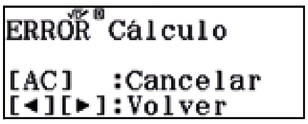
Se procede como en los casos anteriores:

Los números tienen 91 y 100 cifras, respectivamente.

4

Se procede como en los casos anteriores:





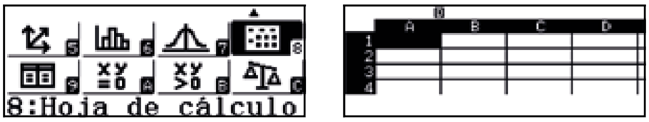
La calculadora ve superada su capacidad y no es capaz de hallar el resultado, por lo que no se puede contar el número de cifras de un número tan grande. Habrá, por tanto, que buscar otra estrategia.

11 | Logaritmos
Número de cifras de un número "muy grande"

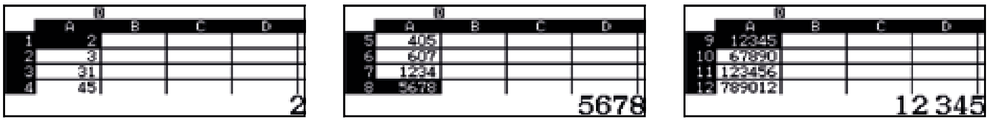
5

Para resolver estas cuestiones se accede al modo *Hoja de cálculo*:

MENU 8

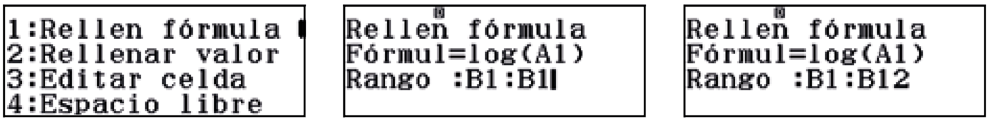


Seguidamente se introducen, en la columna A, los números indicados.

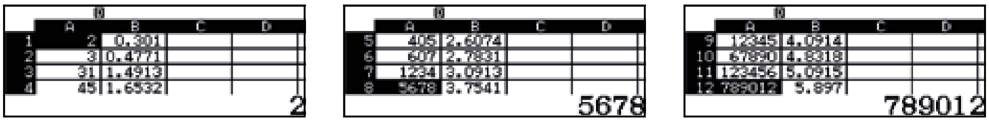


Se selecciona la celda B1 y se introduce la fórmula **log(A1)**. Seguidamente se extiende dicha fórmula al rango B1:B12.

OPTN 1   log□ (ALPHA (−) 1)   ALPHA , 1 ALPHA ⎘ ALPHA , 1 2



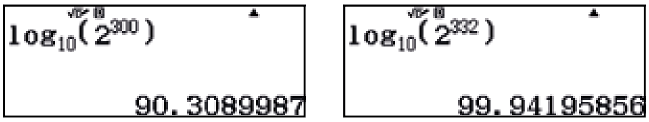
En la columna B aparecen los correspondientes logaritmos:



Se observa que la parte entera de cada logaritmo es una unidad inferior al número de cifras del número correspondiente. Es fácil deducir que si un número tiene n cifras su logaritmo decimal consta de una parte entera con n - 1 cifras. Este resultado se puede utilizar para resolver la actividad 3.

6

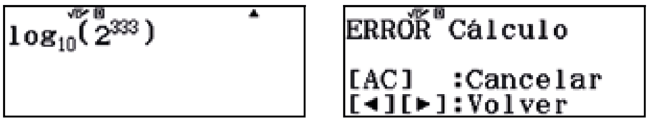
Se calcula, en cada caso, el logaritmo decimal y se considera su parte entera:



Sumando una unidad a la parte entera de cada logaritmo se obtiene el número de cifras correspondiente:

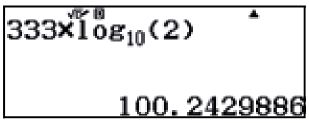
7

Al intentar resolver la actividad 4 utilizando logaritmos, la calculadora devuelve un mensaje de error.



Sin embargo, para calcular el número de cifras de 2^{333}, se puede hacer uso de las propiedades de los logaritmos.

En concreto de $\log_{10} x^p = p \cdot \log_{10} x$



Por tanto, se concluye que el número 2^{333} tiene 101 cifras.

Problema

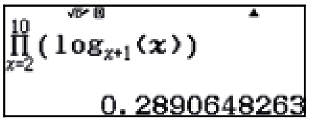
Productos de logaritmos

Comprueba que $\log_3 2 \cdot \log_4 3 \cdot \log_5 4 \cdot \ldots\ldots \cdot \log_{11} 10 = \log_{11} 2$.

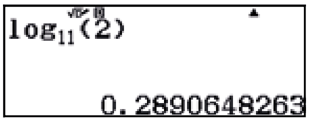
Demuestra la igualdad y generaliza el resultado.

Para demostrarlo, se hará uso de la función productos finitos, a la que se accede mediante [ALPHA] [x]:

[ALPHA] [x] [log□] [x] [+] [1] [▶] [x] [▶] [▶] [2] [▶] [1] [0] [=]



Se calcula, ahora, $\log_{11} 2$:



Como se observa, los dos resultados son iguales.

Demostración:

$$\log_3 2 \cdot \log_4 3 \cdot \log_5 4 \cdot \ldots\ldots \cdot \log_{11} 10 = \frac{\log_{11} 2}{\log_{11} 3} \cdot \frac{\log_{11} 3}{\log_{11} 4} \cdot \frac{\log_{11} 4}{\log_{11} 5} \cdot \ldots\ldots \frac{\log_{11} 9}{\log_{11} 10} \cdot \log_{11} 10 = \log_{11} 2$$

Generalización:

$\log_3 2 \cdot \log_4 3 \cdot \log_5 4 \cdot \ldots\ldots \cdot \log_{n+1} n = \log_{n+1} 2,\ n = 1, 2, 3, \ldots\ldots$

Problema

Sumas de logaritmos

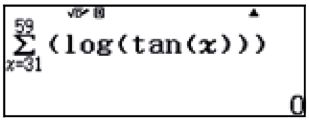
Comprueba que log(tg 31°) + log(tg 32°) + log(tg 33°) + ... + log(tg 59°) = 0.

Demuestra la igualdad y generaliza el resultado.

Para resolver esta cuestión, la calculadora debe estar en modo angular sexagesimal.

Se utiliza la función sumas finitas, a la que se accede mediante [SHIFT] [x]:

[SHIFT] [x] [SHIFT] [(–)] [tan] [x] [)] [)] [▶] [3] [1] [▶] [5] [9] [=]



Demostración:

log(tg 31°) + log(tg 32°) + log(tg 33°) + ... + log(tg 59°) =

= log(tg 31° · tg 32° · ..... · tg 44° · tg 45° · tg 46° · ..... · tg 58° · tg 59°) =

= log(tg 31° · tg 32° · ..... · tg 44° · tg 45° · ctg 44° · ..... · ctg 30° · ctg 31°) = log(1) = 0

Generalización:

log(tg 1°) + log(tg 2°) + log(tg 3°) + ... + log(tg 89°) = 0

12 | Notación científica

Un viaje numérico al CERN: entre lo infinito y lo ínfimo (I)

El CERN es el centro de investigación más importante de Europa. Se han necesitado más de 30 años y una inversión de 6 500 millones € para finalizar su construcción. Decenas de premios nobel han usado y siguen usando sus instalaciones.

Los países miembros del CERN (entre los que se encuentra España) financian con dinero público su presupuesto anual, que asciende a mil millones de francos suizos (CHF).

1 Expresa en notación científica el presupuesto del CERN. Expresa dicho presupuesto en euros (€) y en dólares US ($) de acuerdo con el tipo de cambio vigente.

[1 € = 1,14479 US $, 1 CHF = 0,90767 €]

2 Compara el presupuesto anual del CERN con los presupuestos generales del estado español para el año 2016, que ascendían a 274 731,84 M €.

3 Durante el funcionamiento de sus instalaciones, el CERN genera una factura eléctrica de doscientos cincuenta millones de euros anuales. ¿Qué porcentaje representa esta cifra sobre el total de su presupuesto?

4 El LHC (Large Hadron Collider) es la joya de la corona del CERN. Se trata de un acelerador de partículas que puede acelerar protones hasta alcanzar 0,999999991 veces la velocidad de la luz. ¿Cuántos kilómetros recorre durante un minuto un protón que se mueve a esa velocidad en uno de los anillos de aceleración del LHC?

5 Compara el valor que has obtenido en el apartado anterior con la distancia media estimada entre la Tierra y el Sol, de aproximadamente $1{,}5 \times 10^{11}$ m).

6 El LHC es un anillo casi circular de 27 km de longitud. ¿Cuál es el radio de ese anillo? ¿Qué superficie interior alberga dicho anillo? Compara esa cantidad con la superficie de un campo de futbol (~ 1 ha) y con la superficie de una ciudad cosmopolita como Barcelona (~100 km²).

CASIO División Educativa
Federación Española de Sociedades de Profesores de Matemáticas

12 | Notación científica

Un viaje numérico al CERN: entre lo infinito y lo ínfimo (I)

MATERIALES

Calculadora CASIO fx-570/991 SP X II Iberia

NIVEL EDUCATIVO

4º de ESO

ORIENTACIONES DIDÁCTICAS Y TÉCNICAS

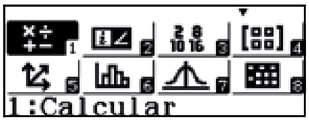
- Previamente a la realización de la actividad, se recomienda contextualizarla con una breve explicación de qué es el CERN y que investigaciones se llevan a cabo.

EJEMPLO DE SOLUCIÓN

1

Se introduce el presupuesto expresado en francos suizos y se expresa en notación científica:

[MENU] [1]



[1] [0] [0] [0] [0] [0] [0] [0] [0] [0] [=]

```
1000000000
             1 000 000 000
```

[ENG]

```
1000000000
                     1×10⁹
```

Seguidamente se expresa el presupuesto en euros, aplicando el tipo de cambio vigente 1 CHF = 0,90767 €:

[Ans] [×] [0] [·] [9] [0] [7] [6] [7] [=]

```
Ans×0.90767
               907 670 000
```

[SHIFT] [ENG]

```
Ans×0.90767
                907.67×10⁶
```

A continuación, se expresa el resultado en dólares US ($):

[Ans] [×] [1] [·] [1] [4] [4] [7] [9] [=]

```
Ans×1.14479
             1 039 091 539
```

[SHIFT] [ENG]

```
Ans×1.14479
          1.039091539×10⁹
```

2

Se dividen ambos presupuestos:

$$\frac{274731.84\times10^{6}}{907670000}$$

```
                302.6781099
```

En consecuencia, los presupuestos generales del estado español son más de 300 veces el presupuesto del CERN.

12 Notación científica
Un viaje numérico al CERN: entre lo infinito y lo ínfimo (I)

3

Para calcular el porcentaje, se divide la factura eléctrica entre el presupuesto total:

[2] [5] [0] [x10ˣ] [6] [÷] [1] [x10ˣ] [9] [=]   [S⇔D]

```
250×x10 6÷1 x10 9
                1/4
```

```
250×x10 6÷1 x10 9
               0.25
```

Por tanto, el CERN dedica el 25% de su presupuesto al gasto eléctrico.

4

Se introduce la velocidad de la luz, c_0:

[SHIFT] [7]   [1]   [3]   [=]

```
1:Universal
2:Electromagnétic
3:Atómica&Nuclear
4:Fisicoquímicas
```

```
1:h    2:ħ    3:c0
4:ε0   5:μ0   6:Z0
7:G    8:lP   9:tP
```

```
c0
```

```
c0
        299 792 458
```

Seguidamente se multiplica por 0, 999999991, para obtener la velocidad del protón:

[Ans] [×] [0] [•] [9] [9] [9] [9] [9] [9] [9] [9] [1] [=]

```
Ans×0.999999991
      299 792 455.3
```

El resultado se expresa en m/s. Para obtener la velocidad en km/h se procede a realizar la conversión entre las unidades:

[SHIFT] [8]   [▼]   [1]   [2]   [=]

```
1:Longitud
2:Area
3:Volumen
4:Masa
```

```
1:Velocidad
2:Presión
3:Energía
4:Potencia
```

```
1:km/h▸m/s    2:m/s▸km/h
```

```
Ansm/s▸km/h
```

Se obtiene, así:

```
Ansm/s▸km/h
      1 079 252 839
```

Dividiendo entre 60 se obtiene la distancia que recorre en un minuto:

[Ans] [÷] [6] [0] [=] [ENG]

```
Ans÷60
    17.98754732x10^6
```

5

En primer lugar se expresa la distancia recorrida por el protón en metros.

[1] [•] [8] [x10ˣ] [7] [×] [1] [0] [0] [0] [=]

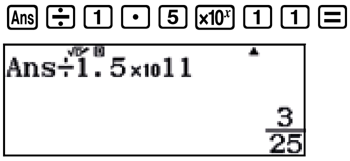
```
1.8x10 7×1000
          1.8x10^10
```

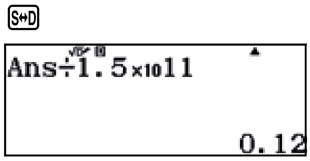

CASIO División Educativa

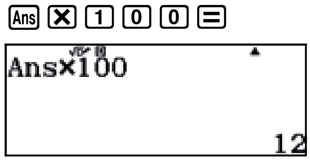
Federación Española de Sociedades de Profesores de Matemáticas

Un viaje numérico al CERN: entre lo infinito y lo ínfimo (I)

A continuación, se divide la distancia recorrida por el protón por la distancia entre la Tierra y el Sol:



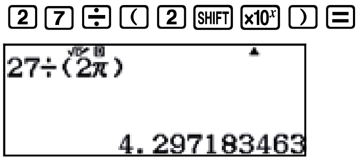




Por tanto, el protón podría completar el viaje de ida y vuelta de la Tierra al Sol 6 veces en un minuto.

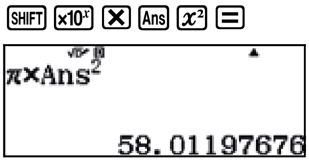
6

Se considera que la longitud de una circunferencia es $L = 2\pi r$, por lo que el radio se calcula como $r = L : 2\pi$.



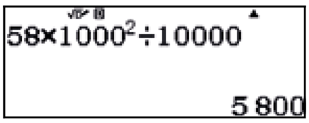
En consecuencia, el radio del anillo es aproximadamente de 4,297 km.

Para calcular el área, se considera que $A = \pi r^2$, de manera que:



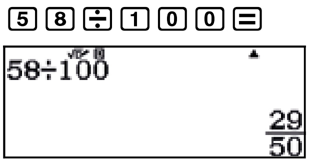
Es decir, aproximadamente 58 km².

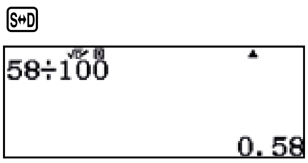
Para comparar esta área con la superficie de un campo de fútbol, conviene expresar ambas superficies en la misma unidad, en este caso, en m²: 1 ha = 10 000 m²



En consecuencia, la superficie que encierra el anillo equivale a 5 800 campos de futbol.

Si se compara esta superficie con la de una ciudad como Barcelona, se tiene:





Luego, la superficie que ocupa el LHC es más de la mitad de la superficie de Barcelona.

13 Notación científica
Un viaje numérico al CERN: entre lo infinito y lo ínfimo (II)

El LHC, emplazado en el CERN, es el acelerador de partículas más grande y energético del mundo. Se trata de un túnel circular de 27 km de longitud por el interior del cual se aceleran haces de protones en sentidos opuestos a velocidades próximas a la luz. Cuando las partículas colisionan, producen altísimas energías a escala subatómica que permiten simular eventos que ocurrieron inmediatamente después del Big Bang.

1 Los haces de protones recorren el anillo de 27 km de longitud a altas velocidades, de manera que completan 11 000 vueltas por segundo. ¿Cuántos metros recorren los protones en un minuto?

2 En cada uno de estos haces hay 100 000 000 000 protones. A pesar de la enorme cantidad de protones que hay en cada haz, unos pocos gramos de hidrógeno son suficientes para proporcionar protones que acelerar durante el próximo millón de años. Comprueba la validez de esta afirmación.

3 Para generar los campos magnéticos que mantienen confinados los haces de protones dentro del LHC se utilizan bobinas formadas por hilos de 0,007 mm de grosor (diez veces más finos que un pelo humano) formados por una aleación de niobio-titanio. Dichos hilos soportan intensidades de corriente de 12 000 amperios (más de 400 veces la intensidad que soportan los cables que se usan con tensiones habituales). Para hacernos una idea de la cantidad de cable instalado, si alineáramos todos los filamentos utilizados en los imanes del LHC podríamos ir y volver al Sol más de seis veces.

a) Compara la longitud de cable instalado con las distancias del Sol a los distintos planetas del sistema Solar expresados en UA (1 UA = distancia Tierra-Sol ~150 × 10^6 km):

Sol – Mercurio: 0,39 UA
Sol – Venus: 0,72 UA
Sol –Tierra: 1,00 UA
Sol – Marte: 1,52 UA
Sol – Júpiter: 5,20 UA
Sol – Saturno: 9,54 UA
Sol – Urano: 19,19 UA
Sol – Neptuno: 30,06 UA

b) Teniendo en cuenta que un clip tiene un grosor del orden de 1 mm, ¿cuántos filamentos conductores de niobio-titanio caben en un clip?

4 Tras la colisión de dos haces de protones, se alcanzan temperaturas que exceden en más de 100 000 veces la temperatura del centro del Sol; sin embargo, el interior del LHC es el lugar más frío del universo conocido (1,9 K), así como uno de los más vacíos (con presiones de aproximadamente 10^{-13} atm). Se han de mantener estas condiciones de presión y temperatura para que se mantenga la propiedad de superconductividad de los imanes. Teniendo en cuenta que el cero absoluto de temperatura corresponde a los –273 °C, ¿qué tanto por ciento del cero absoluto se alcanza en el interior del LHC?

13 Notación científica

Un viaje numérico al CERN: entre lo infinito y lo ínfimo (II)

MATERIALES

Calculadora CASIO fx-570/991 SP X II Iberia

NIVEL EDUCATIVO

4º de ESO

ORIENTACIONES DIDÁCTICAS Y TÉCNICAS

- Previamente a la realización de la actividad, se recomienda contextualizarla con una breve explicación de qué es el CERN y qué investigaciones se llevan a cabo.

EJEMPLO DE SOLUCIÓN

1

La distancia que recorren los protones en un minuto, expresada en metros, es:

```
11×10³×27×10³×60
                1.782×10¹⁰
```

2

Cabe recordar que la masa, expresada en gramos, de 1 mol de hidrógeno coincide con el valor de su masa atómica. Por tanto, la masa de 1 mol de H es 1 g. Por otra parte, un mol de cualquier sustancia contiene un número de partículas igual a el Número de Avogadro: $N_A = 6{,}022 \times 10^{23}$. En consecuencia, el número de paquetes de 10^{11} protones que hay en 1 g de hidrógeno es el cociente $N_A : 10^{11}$.

SHIFT 7 | 4 | 3 | ÷ 1 ×10ˣ 1 1 =

```
1:Universal
2:Electromagnétic
3:Atómica&Nuclear
4:Fisicoquímicas
```

```
1:u     2:f     3:NA
4:k     5:Vm    6:R
7:c1    8:c2    9:σ
```

```
NA÷10¹¹
          6.02214129×10¹²
```

Si se lanzara un paquete de protones cada segundo, el tiempo que se tardaría en lanzar todos los protones sería $6{,}022 \cdot 10^{12}$ s. Este tiempo, expresado en años es:

```
Ans÷3600÷24÷365
                190 960.8476
```

Se puede calcular, ahora, cuántos gramos de hidrógeno se necesitan para enviar paquetes de protones durante 1 millón de años:

```
1×10⁶÷Ans
                5.236675541
```

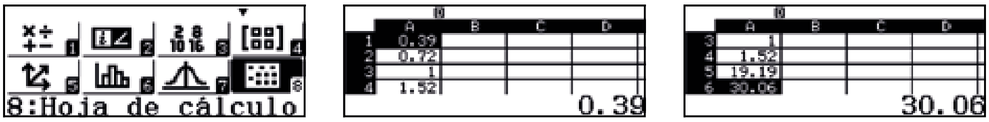
Así pues, con solo 5 g de hidrógeno se podrían enviar paquetes de 10^{11} protones a un ritmo de un paquete cada segundo durante 1 millón de años, por lo que la afirmación es consistente.

13 Notación científica
Un viaje numérico al CERN: entre lo infinito y lo ínfimo (II)

3

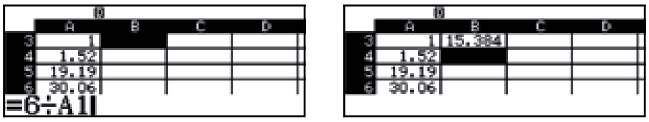
a) Se introducen todos los valores en una hoja de cálculo:

MENU 8



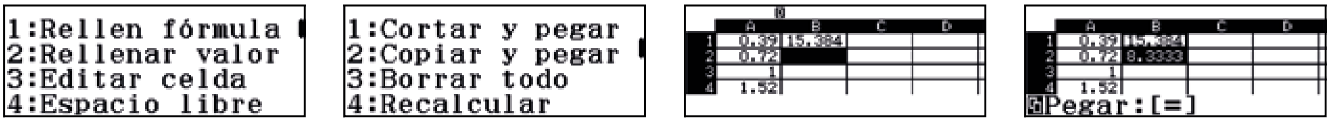
A continuación se introduce en la celda B1 la siguiente fórmula:

ALPHA CALC 6 ÷ ALPHA (−) 1 =

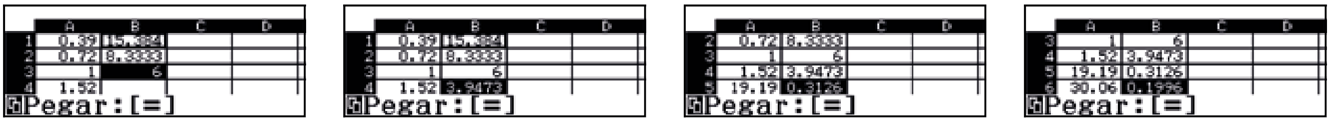


Seguidamente, se copia esta fórmula en el resto de celdas de la columna B:

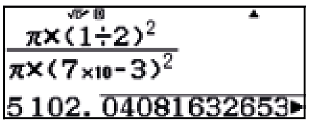
OPTN ▼ 2 ▼ = ▼ =



▼ = ▼ = ▼ =



b) Para determinar cuántos filamentos caben en el grosor de un clip hay que comparar las áreas, no los diámetros.

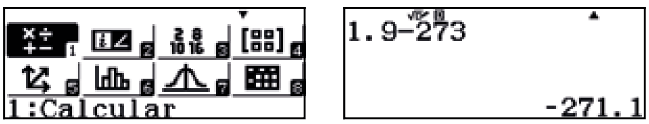


Es decir, en el grosor de un clip caben más de 5 000 cabezas de filamento conductor.

4

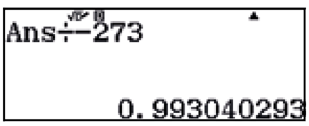
En primer lugar, se expresa la temperatura en grados Celsius:

MENU 1



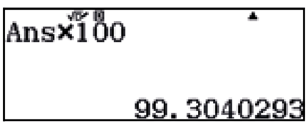
Seguidamente, se divide esta temperatura por la correspondiente al 0 K, es decir –273 ºC:

Ans ÷ (−) 2 7 3 S⇔D



A continuación, se multiplica por 100 para obtener el porcentaje:

Ans × 1 0 0 = S⇔D



Problema

Comparación de números

¿Cuántas cifras tienen los números 1997^{1999} y 1999^{1997}?

Compara ambos números.

El cálculo de 1997^{1999} desborda la capacidad de la calculadora, por lo que para comparar los dos resultados se requiere hacer uso de las propiedades de los logaritmos:

1) Si $x, y > 0$, $\log x > \log y \Leftrightarrow x > y$

2) $\log x^n = n \cdot \log x$.

3) Sea n∈N∪ {0}, si $10^n \leq x < 10^{n+1} \Leftrightarrow n \leq \log x < n + 1$, entonces, x tiene $n + 1$ cifras.

De la segunda propiedad que se acaba de ver se tiene que:

$\log(1997^{1999}) = 1999 \cdot \log 1997$

```
1999×log(1997)
        6 597.455752
```

1997^{1999} tiene 6 598 cifras.

$\log(1999^{1997}) = 1997 \cdot \log 1999$

```
1997×log(1999)
        6 591.72315
```

1999^{1997} tiene 6 592 cifras.

En consecuencia, $1997^{1999} > 1999^{1997}$

Para comparar ambos números se calcula el cociente de ambos números:

$$\frac{1999^{1997}}{1997^{1999}} = \frac{1999^{1997}}{1997^{1997} \cdot 1997^2} = \left(\frac{1999}{1997}\right)^{1997} \cdot \frac{1}{1997^2}$$

A continuación se calcula $\frac{1999}{1997}$:

$$\frac{1999}{1997} \qquad \frac{1\,999}{1\,997}$$

$$\frac{1999}{1997} \qquad 1.001001502$$

En consecuencia, $\frac{1999}{1997} < 1{,}002$.

Seguidamente se calcula $\frac{1}{1997^2}$:

$$\frac{1}{1997^2} \qquad \frac{1}{3\,988\,009}$$

$$\frac{1}{1997^2} \qquad 0.00000025075$$

Por tanto, $\frac{1}{1997^2} < 0{,}0000003$.

Lo que significa que: $\frac{1999^{1997}}{1997^{1999}} = \left(\frac{1999}{1997}\right)^{1997} \cdot \frac{1}{1997^2} < 1{,}002^{1997} \cdot 0{,}0000003$.

```
1.002^1997×0.0000003
        0.00001621665
```

Por tanto, $\frac{1999^{1997}}{1997^{1999}} = \left(\frac{1999}{1997}\right)^{1997} \cdot \frac{1}{1997^2} < 1$, luego, $1997^{1999} > 1999^{1997}$.

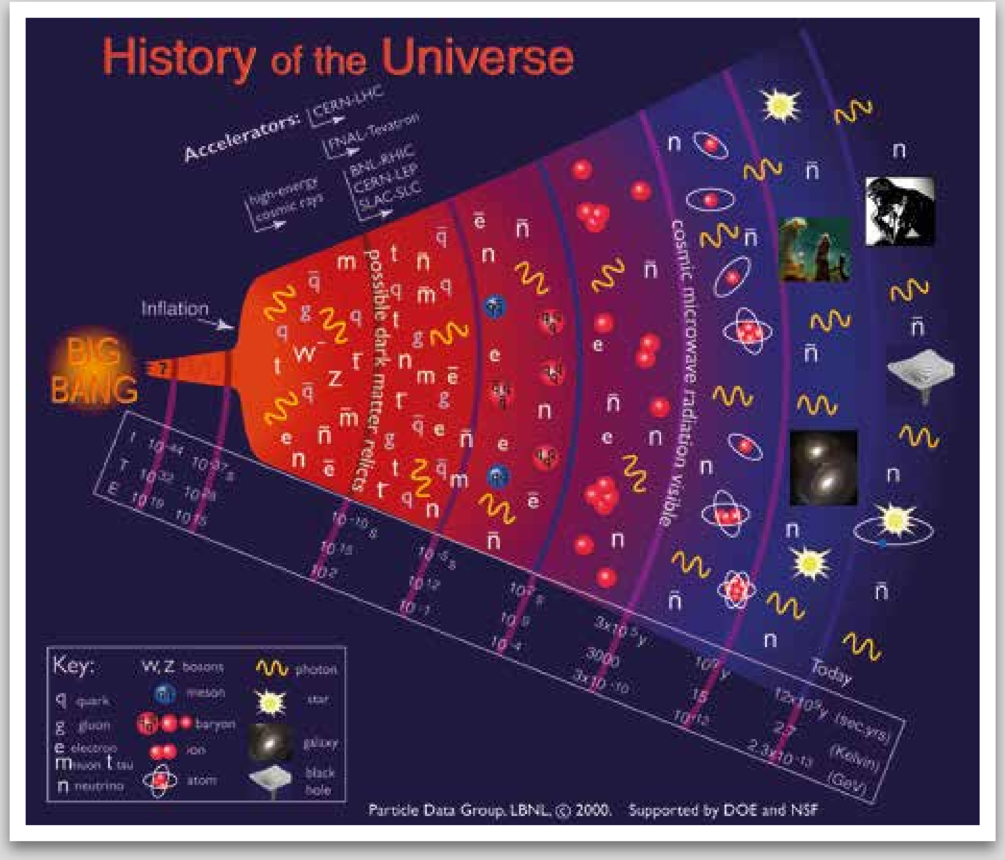
14 | Notación científica
Back to the BigBang: el timeline del Universo (I)

El CERN es el centro de investigación física más importante de Europa y uno de los más importantes del mundo. Decenas de premios nobel han usado y usan sus instalaciones. La investigación científica en el CERN hace uso de grandes aceleradores de partículas en los que se generan billones de colisiones, las cuales son analizadas por un complejo sistema informático que filtra, recoge y distribuye los datos.

El mayor de los aceleradores, actualmente en funcionamiento en el laboratorio de física de partículas, es el LHC (Large Hadron Collider). La densidad de energía y la temperatura que se alcanza en el LHC es similar a la que los modelos teóricos predicen que había instantes después del *Big Bang*. Es por ello que los físicos esperan descubrir cómo ha evolucionado el Universo desde su origen hasta su estado actual, analizando los datos que se obtienen del LHC.

Una de las dificultades conceptuales con las que nos encontramos a la hora de entender los estudios de la física de partícula y de la cosmología son los valores ínfimos y/o gigantescos de las escalas temporales y energéticas.

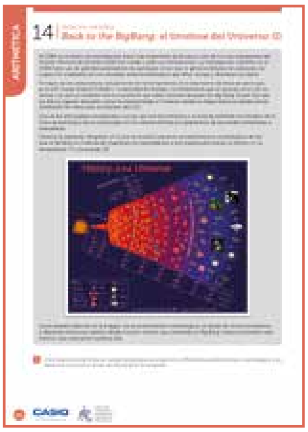
Observa la siguiente infografía, en la que se muestra una serie acontecimientos cosmológicos de los que se facilitan los órdenes de magnitud correspondientes a tres magnitudes físicas: el tiempo (t), la temperatura (T) y la energía (E).



Como puedes observar en la imagen, los acontecimientos cosmológicos se sitúan de forma concéntrica a diferentes distancias radiales desde el punto central, que representa el *Big Bang*, hasta el perímetro más exterior, que representa nuestros días.

1 ¿Qué relación existe entre los valores temporales asociados a los diferentes acontecimientos cosmológicos y las distancias a las que se sitúan del Big Bang en la infografía?

14 | Notación científica
Back to the BigBang: el timeline del Universo (I)



MATERIALES

Calculadora CASIO fx-82/85/350 SP X II
Hoja de cálculo (Excel Microsoft Office o Calc LibreOffice)
GeoGebra
Recursos on-line y bibliografía complementaria:

- Origen y evolución del Universo: http://www.iac.es/cosmoeduca/universo/charla1.html
- The Scale of the Universe: http://htwins.net/scale2/
- Nanoraisen, aventuras a través de los decimales: http://www.nanoreisen.com/espanol/index.html
- Potencias de 10: https://www.youtube.com/watch?v=9JUpIa4ncWg&feature=youtu.be
- The Scales of the Universe: https://finance.yahoo.com/video/3-minute-animation-change-way-181643354.html
- Linea de tiempo sobre el Universo: https://prezi.com/s3hdurrkr0lp/linea-del-tiempo-sobre-el-origen-del-universo/
- Is that a Big Number: http://www.isthatabignumber.com/home/

NIVEL EDUCATIVO

3º de ESO, 4º de ESO y 1º Bachillerato

ORIENTACIONES DIDÁCTICAS Y TÉCNICAS

- La actividad puede trabajarse individualmente o en pequeños grupos de estudio. Se recomienda trabajar conjuntamente con la asignatura de Física y Química, puesto que los contenidos de aplicación están directamente relacionados con esta materia. Asimismo, se aconseja acompañar alguna de las sesiones con algunos de los breves vídeos propuestos en la bibliografía complementaria.

- Para la realización de los cálculos propuestos en las actividades es necesario hacer uso del menú de configuración *Formato de número*. Se accede a dicho menú, en la calculadora científica fx-82/85/350 SP X II, mediante:

  ON MENU 1 SHIFT MENU 3

```
1:Entrada/Salida
2:Unidad angular
3:Formato número
4:Símb ingeniería
```

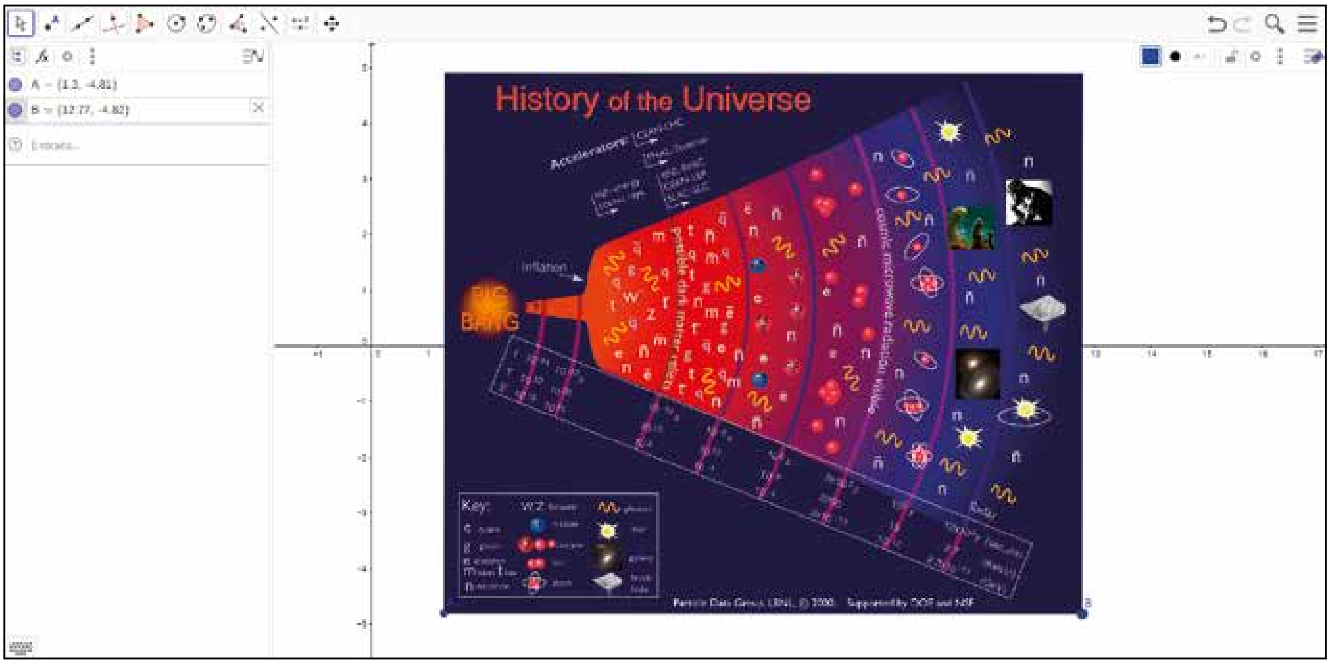
```
1:Fijar decimales
2:Not científica
3:Normal
```

También deben utilizarse las teclas de las funciones exponencial y logarítmica de base 10, 10^x y $\log_{10} x$.

EJEMPLO DE SOLUCIÓN

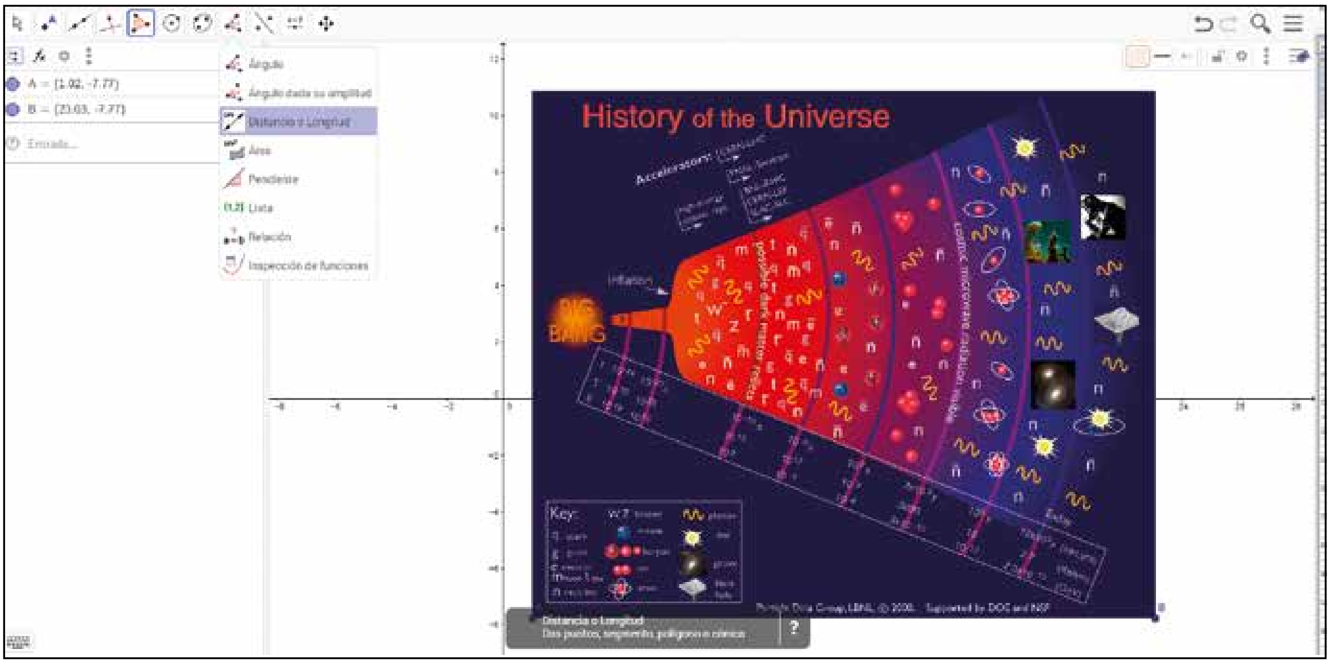
1

Las distancias sobre la infografía pueden medirse usando simplemente una regla graduada. Si se opta por un tratamiento digital de la imagen, puede hacerse uso de GeoGebra.



Back to the BigBang: el timeline del Universo (I)

Se trata ahora de hacer uso de la opción *Distancia* o *Longitud* para determinar la distancia entre dos puntos.



Se organiza en una tabla las distancias entre los acontecimientos cósmicos. Por ejemplo:

t_1	t_2	distancia
$1{,}00 \cdot 10^{-44}$ s	$1{,}00 \cdot 10^{-37}$ s	0,62
$1{,}00 \cdot 10^{-37}$ s	$1{,}00 \cdot 10^{-10}$ s	1,56
$1{,}00 \cdot 10^{-10}$ s	$1{,}00 \cdot 10^{-5}$ s	1,10
$1{,}00 \cdot 10^{-5}$ s	$1{,}00 \cdot 10^{2}$ s	1,10
$1{,}00 \cdot 10^{2}$ s	$3{,}00 \cdot 10^{5}$ y	1,13
$3{,}00 \cdot 10^{5}$ y	$1{,}00 \cdot 10^{9}$ y	1,16
$1{,}00 \cdot 10^{9}$ y	$1{,}20 \cdot 10^{10}$ y	1,01

Lo primero que se observa es que el uso de unidades temporales no es homogéneo, algunos valores se indican en segundos y otros en años. Para poder comparar adecuadamente los datos, hay que expresarlos en las mismas unidades. Se opta por expresar todos los datos en segundos, por ser esta la unidad de tiempo en el SI. Para ello, se convierten, progresivamente, los años en días, los días en horas y las horas en segundos.

$3\times10^5\times365$
109 500 000

Ans×24
2 628 000 000

Ans×3600
9.4608×10^{12}

Se construye, así, una nueva tabla de valores entre tiempos sucesivos, expresados en segundos:

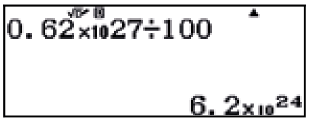
t_1	t_2	distancia
$1{,}00 \cdot 10^{-44}$ s	$1{,}00 \cdot 10^{-37}$ s	0,62
$1{,}00 \cdot 10^{-37}$ s	$1{,}00 \cdot 10^{-10}$ s	1,56
$1{,}00 \cdot 10^{-10}$ s	$1{,}00 \cdot 10^{-5}$ s	1,10
$1{,}00 \cdot 10^{-5}$ s	$1{,}00 \cdot 10^{2}$ s	1,10
$1{,}00 \cdot 10^{2}$ s	$9{,}46 \cdot 10^{12}$ s	1,13
$9{,}46 \cdot 10^{12}$ s	$3{,}15 \cdot 10^{16}$ s	1,16
$3{,}15 \cdot 10^{16}$ s	$3{,}78 \cdot 10^{17}$ s	1,01

De la observación de la tabla se concluye que, mientras que el factor de incremento en la distancia entre sucesivos puntos de la imagen se mantiene prácticamente constante (con la excepción del primer y el segundo punto), no ocurre lo mismo con las distancias temporales:

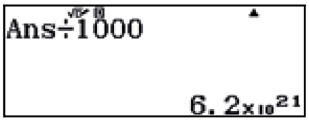
Back to the BigBang: el timeline del Universo (I)

t_1	t_2	distancia	t_1/t_2		
$1{,}00 \cdot 10^{-44}$ s	$1{,}00 \cdot 10^{-37}$ s	0,62	$1{,}00 \cdot 10^{7}$ s		
$1{,}00 \cdot 10^{-37}$ s	$1{,}00 \cdot 10^{-10}$ s	1,56	$1{,}00 \cdot 10^{27}$ s	1,56 / 0,62	2,5
$1{,}00 \cdot 10^{-10}$ s	$1{,}00 \cdot 10^{-5}$ s	1,10	$1{,}00 \cdot 10^{5}$ s	1,10 / 1,56	0,7
$1{,}00 \cdot 10^{-5}$ s	$1{,}00 \cdot 10^{2}$ s	1,10	$1{,}00 \cdot 10^{7}$ s	1,10 / 1,10	1,0
$1{,}00 \cdot 10^{2}$ s	$9{,}46 \cdot 10^{12}$ s	1,13	$1{,}00 \cdot 10^{10}$ s	1,13 / 1,10	1,0
$9{,}46 \cdot 10^{12}$ s	$3{,}15 \cdot 10^{16}$ s	1,16	$9{,}46 \cdot 10^{3}$ s	1,13 / 1,16	1,0
$3{,}15 \cdot 10^{16}$ s	$3{,}78 \cdot 10^{17}$ s	1,01	$3{,}15 \cdot 10^{1}$ s	1,01 / 1,16	0,9

En consecuencia, la separación entre las diferentes circunferencias concéntricas que aparecen en la infografía no respeta el factor de crecimiento temporal. Por otro lado, se observa que algunos factores de crecimiento toman valores gigantescos. Por ejemplo, el factor temporal de crecimiento entre los dos primeros puntos es del orden de 10^{27}. Esto significa que si el primer punto está situado a 0,62 cm del origen, el segundo debería estarlo a $0{,}62 \cdot 10^{27}$ cm. Esta distancia se expresa en metros como:

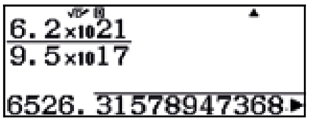


Y en kilómetros como:



Para poder hacernos una idea de hasta qué punto es grande esta distancia, podemos compararla con algunas distancias astronómicas conocidas.

- Diámetro de la Tierra: 12 800 km = $1{,}28 \cdot 10^{4}$ km
- Distancia de la Tierra a la Luna: 384 400 km = $3{,}84 \cdot 10^{5}$ km
- Distancia de la Tierra al Sol: 150 000 000 km = $1{,}5 \cdot 10^{8}$ km
- Radio del sistema Solar: 4 500 000 000 km = $4{,}5 \cdot 10^{9}$ km
- Distancia a Alpha-Centauri: $41{,}3 \cdot 10^{12}$ km
- Diámetro de la Vía Láctea: del orden de $9{,}5 \cdot 10^{17}$ km



Es decir, el segundo punto estaría situado sobre el papel a una distancia superior a 6.500 veces el diámetro de nuestra galaxia. Y sí, ¡eso demasiado papel para un póster!

15 | Notación científica
Back to the BigBang: el timeline del Universo (II)

Hagamos un viaje en el tiempo hacia el pasado desde el momento presente y veamos algunos de los acontecimientos físicos más relevantes durante la evolución del Universo:

- **Actualidad** (13 700 millones de años desde el *Big Bang*). En el CERN, los físicos han iniciado un viaje en el tiempo para determinar el origen de la materia que conforma nuestro Universo. La temperatura cósmica de fondo ha descendido hasta casi los –270 °C. ¿Empieza nuestra muerte térmica?
- **Vida en la Tierra** (10 000 millones de años desde el *Big Bang*). Una sopa de moléculas orgánicas aparece en la Tierra, un pequeño planeta azul situado en los confines de la Vía Láctea, una galaxia espiral de tamaño medio perdida en la inmensidad del Universo.
- **Sistema Solar** (9 200 millones de años desde el *Big Bang*). La fuerza de la gravedad ha agrupado los residuos estelares en torno al Sol hasta formar un sistema planetario.
- **Estrellas y galaxias** (200 millones de años después del *Big Bang*). La fuerza de la gravedad atrae el polvo cósmico material y los átomos ligeros se fusionan en el corazón de las estrellas, que paulatinamente se van agrupando en cúmulos y galaxias. Empiezan a producirse átomos pesados como resultado de las reacciones nucleares de fusión. La temperatura cósmica desciende hasta los 4 000 °C.
- **Átomos ligeros** (380 000 años desde el *Big Bang*). Se forman los primeros átomos de hidrógeno y helio. Los fotones escapan de la interacción con los electrones y el Universo se ilumina por primera vez.
- **Núcleos ligeros** (3 minutos desde el *Big Bang*). Protones y neutrones se unen para formar los núcleos de los átomos ligeros. Los fotones son continuamente emitidos y absorbidos por la materia. Todo está a oscuras, el Universo es opaco.
- **Protones y neutrones** (0,01 milisegundos después del *Big Bang*). Se forman los protones y los neutrones a partir de los quarks y los gluones. Todo el Universo existente tiene el tamaño del actual Sistema Solar. La temperatura cósmica de fondo supera el billón de grados Celsius.
- **Plasma de quarks y gluones** (una billonésima de segundo desde el *Big Bang*). Entran en acción la fuerza nuclear débil y la fuerza electromagnética. El radio del Universo no alcanza los 300 millones de kilómetros. La temperatura cósmica de fondo es de 10 000 billones de grados Celsius.
- **Zoo de partículas** (10^{-35} s después del *Big Bang*). Una billonésima de billonésima de billonésima de segundo después de la gran explosión, apenas un suspiro cósmico. Mesones, electrones, quarks, neutrinos y fotones interaccionan de forma continua. La fuerza nuclear fuerte y la fuerza electrodébil dominan un Universo que cabe en una manzana. La temperatura cósmica de fondo es de 1 000 000 billones de billones de grados Celsius.
- **$t = 10^{-43}$ s, $T = 10^{32}$ °C**. Albores del Big Bang: origen de nuestro horizonte de exploración temporal. Todo el Universo, concentrado en un punto, acaba de estallar.

1 Expresa las cantidades temporales del texto en notación científica y con la unidad de medida indicada.

2 Expresa las cantidades anteriores en segundos.

3 Expresa en escala logarítmica decimal los valores temporales correspondientes a cada uno de los hitos anteriores.

4 Establece la proporción correspondiente a la distancia temporal entre los hitos consecutivos. ¿Qué se puede deducir a partir de los resultados obtenidos?

5 Imagina que toda la historia del Universo pudiera concentrarse en el periodo de tiempo correspondiente a un sólo año solar terrestre. ¿En qué punto temporal de ese año nos encontraríamos en la actualidad?

6 Discute y reflexiona con tus compañeros sobre los resultados obtenidos en las actividades anteriores. ¿Qué conclusiones se pueden extraer?

7 ¿Qué nuevas preguntas te plantearías a partir del modelo de evolución temporal del Universo que se ha trabajado?

Back to the BigBang: el timeline del Universo (II)

MATERIALES

Calculadora CASIO fx-82/85/350 SP X II Iberia
Hoja de cálculo (Excel Microsoft Office o Calc LibreOffice)
GeoGebra
Recursos on-line y bibliografía complementaria:

- Origen y evolución del Universo: http://www.iac.es/cosmoeduca/universo/charla1.html
- The Scale of the Universe: http://htwins.net/scale2/
- Nanoraisen, aventuras a través de los decimales: http://www.nanoreisen.com/espanol/index.html
- Potencias de 10: https://www.youtube.com/watch?v=9JUpIa4ncWg&feature=youtu.be
- The Scales of the Universe: https://finance.yahoo.com/video/3-minute-animation-change-way-181643354.html
- Linea de tiempo sobre el Universo: https://prezi.com/s3hdurrkr0lp/linea-del-tiempo-sobre-el-origen-del-universo/
- Is that a Big Number: http://www.isthatabignumber.com/home/

NIVEL EDUCATIVO

3º de ESO y 4º de ESO

ORIENTACIONES DIDÁCTICAS Y TÉCNICAS

- La actividad puede trabajarse individualmente o en pequeños grupos de estudio. Se recomienda trabajar conjuntamente con la asignatura de Física y Química, puesto que los contenidos de aplicación están directamente relacionados con esta materia. Asimismo, se aconseja acompañar alguna de las sesiones con algunos de los breves vídeos propuestos en la bibliografía complementaria.
- Para la realización de los cálculos propuestos en las actividades es necesario hacer uso del menú de configuración *Formato de número*. Se accede a dicho menú mediante:

ALPHA MENU 3

```
1:Entrada/Salida
2:Unidad angular
3:Formato número
4:Símb ingeniería
```

```
1:Fijar decimales
2:Not científica
3:Normal
```

También deben utilizarse las teclas de las funciones exponencial y logarítmica de base 10, 10^x y $\log_{10} x$.

EJEMPLO DE SOLUCIÓN

1

Se accede al menú *Formato de número*, se selecciona la opción *Notación científica* y se escogen dos cifras significativas.

SHIFT MENU 3

```
1:Entrada/Salida
2:Unidad angular
3:Formato número
4:Símb ingeniería
```

2

```
1:Fijar decimales
2:Not científica
3:Normal
```

2

```
1:Fijar decimales
2:Not científica
3:Normal
Científ:Selec 0~9
```

Seguidamente se introducen las cantidades:

13.700 millones de años

13700×10^{6} → 1.4×10^{10}

10.000 millones de años

10000×10^{6} → 1.0×10^{10}

9.200 millones de años

9200×10^{6} → 9.2×10^{9}

200 millones de años

200×10^{6} → 2.0×10^{8}

380.000 años

380000 → 3.8×10^{5}

3 minutos

3 → 3.0×10^{0}

0,01 milisegundos

0.01×10^{-3} → 1.0×10^{-5}

billonésima de segundo

1×10^{-12} → 1.0×10^{-12}

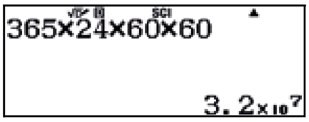
t = 10^{-43} s

1×10^{-43} → 1.0×10^{-43}

Back to the BigBang: el timeline del Universo (II)

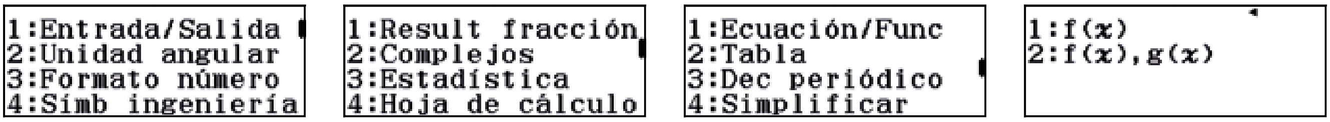
2

Para expresar en segundos todos aquellos valores temporales que vienen dados en años terrestres hay que multiplicar por el siguiente factor:



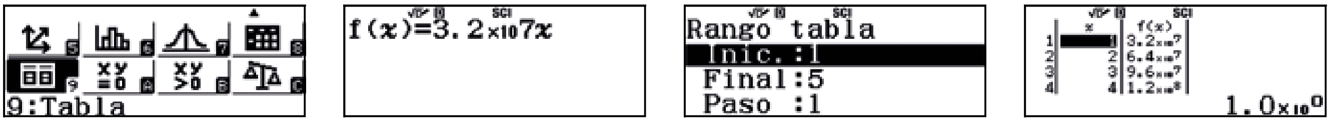
Para realizar todas las conversiones de años a segundos puede usarse una tabla de valores. Para ello, conviene configurar la calculadora para que genere una tabla con una sola función:

ALPHA MENU ▼ ▼ 2 1

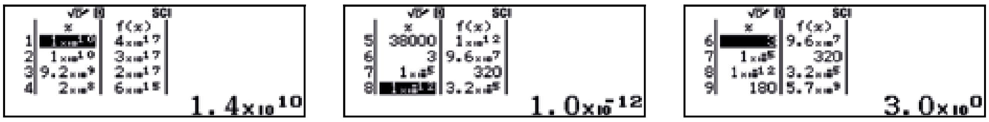


Seguidamente, se accede al menú *Tabla* y se define la función $f(x) = 3{,}2 \cdot 10^7 x$:

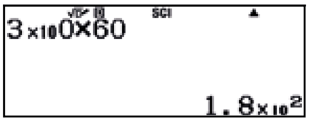
ON 9 3 . 2 x10^x 7 x =



La elección de los valores inicial, final y de paso es irrelevante, ya que los valores de la variable x se cambiarán por los que interesan realmente, que son los tiempos de los acontecimientos cósmicos expresados en años:



La conversión de minutos a segundos viene dada por el siguiente factor:

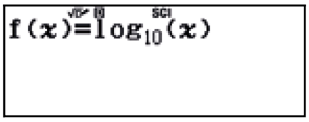


El resto de valores ya están expresados en segundos, por lo que se obtiene la siguiente tabla, en la que se han expresado los resultados con 3 cifras significativas:

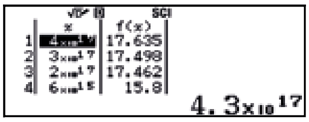
t	t(s)
$1{,}37 \cdot 10^{10}$ y	$4{,}32 \cdot 10^{17}$ s
$1{,}00 \cdot 10^{10}$ y	$3{,}15 \cdot 10^{17}$ s
$9{,}20 \cdot 10^{9}$ y	$2{,}90 \cdot 10^{17}$ s
$2{,}00 \cdot 10^{8}$ y	$6{,}31 \cdot 10^{15}$ s
$3{,}80 \cdot 10^{5}$ y	$1{,}20 \cdot 10^{13}$ s
$3{,}00 \cdot 10^{0}$ min	$1{,}80 \cdot 10^{2}$ s
$1{,}00 \cdot 10^{-2}$ ms	$1{,}00 \cdot 10^{-5}$ s
$1{,}00 \cdot 10^{-12}$ s	$1{,}00 \cdot 10^{-12}$ s
$1{,}00 \cdot 10^{-35}$ s	$1{,}00 \cdot 10^{-35}$ s
$1{,}00 \cdot 10^{-43}$ s	$1{,}00 \cdot 10^{-43}$ s

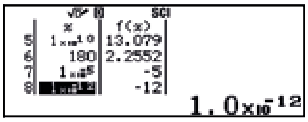
3

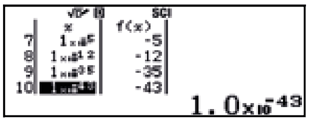
Para realizar la conversión a la escala logarítmica se construye una tabla de valores para la función del logaritmo decimal $f(x)$ = log x:



Análogamente a lo expuesto en el apartado anterior, se conservan los valores que la calculadora ofrece por defecto para inicio, fin y paso. A continuación, se introducen los diez valores de *x* correspondientes a los tiempos expresados en segundos de la tabla anterior:



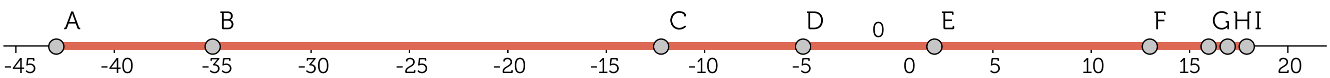




Con 3 cifras significativas, se obtendría la siguiente tabla:

t	t(s)	log t
$1{,}37 \cdot 10^{10}$ y	$4{,}32 \cdot 10^{17}$ s	18
$1{,}00 \cdot 10^{10}$ y	$3{,}15 \cdot 10^{17}$ s	17
$9{,}20 \cdot 10^{9}$ y	$2{,}90 \cdot 10^{17}$ s	17
$2{,}00 \cdot 10^{8}$ y	$6{,}31 \cdot 10^{15}$ s	16
$3{,}80 \cdot 10^{5}$ y	$1{,}20 \cdot 10^{13}$ s	13
$3{,}00 \cdot 10^{0}$ min	$1{,}80 \cdot 10^{2}$ s	2
$1{,}00 \cdot 10^{-2}$ ms	$1{,}00 \cdot 10^{-5}$ s	-5
$1{,}00 \cdot 10^{-12}$ s	$1{,}00 \cdot 10^{-12}$ s	-12
$1{,}00 \cdot 10^{-35}$ s	$1{,}00 \cdot 10^{-35}$ s	-35
$1{,}00 \cdot 10^{-43}$ s	$1{,}00 \cdot 10^{-43}$ s	-43

Se pueden colocar, ahora, en una recta los valores calculados para $\log_{10} t$:



La escala logarítmica proporciona una gráfica que permite visualizar de forma razonable los hitos temporales, considerando que el *Big Bang*, es decir, el origen del tiempo, se sitúa muy cerca de $\log_{10} t$ = -43.

		log *t*	Diferencia
Hoy	J	18	61
	I	17	60
	H	17	60
	G	16	59
	F	13	56
	E	2	45
	D	-5	38
	C	-12	31
	B	-35	8
Big Bang	A	-43	0

15 | Notación científica
Back to the BigBang: el timeline del Universo (II)

4

Los datos registrados en la tabla anterior pueden reordenarse en orden ascendente, tomando el origen del tiempo en log t = -43. Asimismo, se pueden calcular las distancias entre los puntos consecutivos:

	log t	Diferencia	Incremento sumativo (x)	10^x	Factor multiplicativo de crecimiento
A	-43	0	0	$1{,}00 \cdot 10^0$	1
B	-35	8	8	$1{,}00 \cdot 10^8$	100 000 000
C	-12	31	23	$1{,}00 \cdot 10^{23}$	10 000 000 000 0000 000 000 000
D	-5	38	7	$1{,}00 \cdot 10^7$	10 000 000
E	2	45	7	$1{,}00 \cdot 10^7$	10 000 000
F	13	56	11	$1{,}00 \cdot 10^{11}$	100 000 000 000
G	16	59	3	$1{,}00 \cdot 10^3$	1 000
H	17	60	1	$1{,}00 \cdot 10^1$	10
I	17	60	0	$1{,}09 \cdot 10^0$	1,09
J	18	1	18	$1{,}00 \cdot 10^1$	10

Puesto que los datos se proporcionan mediante una escala logarítmica decimal, el incremento sumativo (x) se puede reinterpretar cómo el factor de crecimiento entre un valor y otro, mediante las potencias de base 10 (10^x).

Las posiciones de los distintos puntos en la escala logarítmica evidencia cuáles son las distancias temporales entre dichos puntos.

Como se observa, la distancia, en términos temporales, entre los puntos B y C es muy superior al resto. Así mismo, el intervalo temporal correspondiente a los puntos C y D es muy similar al que corresponde a los puntos D y E.

5

Se ha de definir una función (escala) en la que la edad del Universo corresponda con 365 unidades temporales, que llamaremos *días monstruocósmicos*. Se divide, a su vez, los *días monstruocósmicos* en *horas monstruocósmicas*, *minutos monstrucósmicos* y *segundos monstruocósmicos*. Haciendo uso de esta escala, y teniendo en cuenta que la edad del Universo es del orden de 13.700 millones de años terrestres, se puede determinar la duración del *día monstruocósmico*, así como de la hora, el minuto y el segundo:

Día monstruocósmico	*Hora monstruocósmica*	*Minuto monstruocósmico*	*Segundo monstruocósmico*
13700×10^6÷365 → 3.8×10^7	Ans÷24 → 1.6×10^6	Ans÷60 → 2.6×10^4	Ans÷60 → 4.3×10^2

En consecuencia:

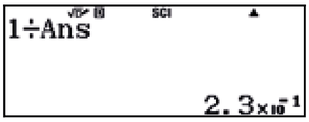
- 1 día *monstruocósmico* = $3{,}8 \cdot 10^7$ años terrestres
- 1 hora *monstruocósmica* = $1{,}6 \cdot 10^6$ años terrestres
- 1 minuto *monstruocósmico* = $2{,}6 \cdot 10^4$ años terrestres
- 1 segundo *monstruocósmico* = $4{,}3 \cdot 10^2$ = 430 años terrestres

De lo que se deduce que 1 centésima de segundo *monstrucósmico* equivale a unos 4,3 años terrestres:

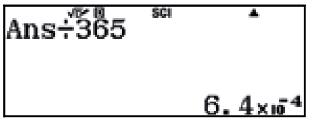
```
4.3×10^2÷100
                4.3×10^0
```

15 | Notación científica
Back to the BigBang: el timeline del Universo (II)

En consecuencia, 1 año terrestre equivale a 0,23 centésimas de segundo *monstrucósmico*, es decir, a 2,3 milésimas:



Se puede calcular, ahora, la equivalencia de 1 día terrestre con las unidades *monstruocósmicas*, dividiendo el resultado anterior entre 365:



Se obtiene, así, que un año terrestre equivale a 0,00064 centésimas de segundo *monstruocósmico*.

En conclusión, si el origen del Universo se sitúa en el inicio del 1 de enero, en la actualidad estaríamos viviendo en la última milésima de segundo del último minuto de la última hora del 31 de diciembre.

6

Actividad de debate dentro del aula.

7

Actividad de debate dentro del aula.

16 | Operaciones
Descomposición de fracciones continuas

Una fracción continua es una expresión del tipo:

$$a + \cfrac{1}{b + \cfrac{1}{c + \cfrac{1}{\dots}}}$$

Donde a, b, c, ... son números enteros positivos denominados cocientes.

Cualquier número racional, es decir, cualquier número que pueda representarse mediante una fracción $\frac{p}{q}$, puede expresarse en forma de **fracción continua finita.**

En cuanto a los números irracionales, pueden expresarse en forma de **fracción continua infinita.**

En el caso particular de los números irracionales cuadráticos, es decir, aquellos que pueden expresan de la forma $a + \sqrt{b}$, los cocientes de las fracciones continuas correspondientes se repiten periódicamente. Por ejemplo, el número irracional $\sqrt{2}$ puede expresarse en forma de fracción continua infinita como:

$$\sqrt{2} = 1 + \cfrac{1}{2 + \cfrac{1}{2 + \cfrac{1}{2 + \cfrac{1}{\dots}}}}$$

En este caso, los cocientes de la fracción continua (1;2,2,2,2,......) se repiten periódicamente y se representan como $(1;\overline{2}\,)$.

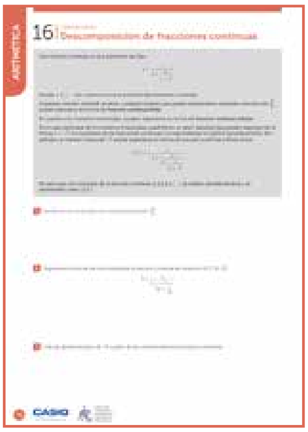
1 Escribe en forma de fracción continua la fracción $\frac{37}{13}$.

2 Expresa en forma de fracción irreducible la fracción continua de cocientes (6; 3, 12, 17):

$$6 + \cfrac{1}{3 + \cfrac{1}{12 + \cfrac{1}{17}}}$$

3 Calcula aproximaciones de $\sqrt{2}$ a partir de las correspondientes fracciones continuas.

16 | Operaciones
Descomposición de fracciones continuas



MATERIALES

Calculadoras CASIO fx-570/991 SP X II Iberia

NIVEL EDUCATIVO

3º de ESO

ORIENTACIONES DIDÁCTICAS

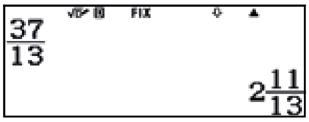
- Con estas actividades se pretende que el alumno repase y consolide las operaciones con números racionales.
- Conviene estudiar las aproximaciones de números irracionales antes de realizar las actividades que se plantean.

EJEMPLO DE SOLUCIÓN

1

En primer lugar, se escribe la fracción impropia $\frac{37}{13}$ como número mixto:

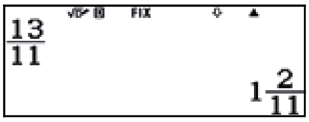
[▤] [3] [7] [▼] [1] [3] [=] [SHIFT] [S⇔D]



De manera que, $\frac{37}{13} = 2 + \frac{11}{13} = 2 + \cfrac{1}{\frac{13}{11}}$.

Seguidamente, se escribe la fracción impropia $\frac{13}{11}$ como número mixto:

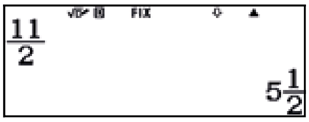
[AC] [▤] [1] [3] [▼] [1] [1] [=] [SHIFT] [S⇔D]



En consecuencia, $\frac{37}{13} = 2 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{2}{11}} = 2 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{\frac{11}{2}}}$.

Finalmente, se escribe la fracción impropia $\frac{11}{2}$ como número mixto:

[AC] [▤] [1] [1] [▼] [2] [=] [SHIFT] [S⇔D]



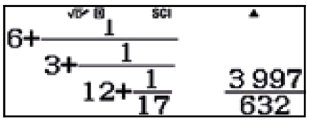
En consecuencia, $\frac{37}{13} = 2 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{5 + \cfrac{1}{2}}}$.

Los cocientes de la fracción continua son (2; 1, 5, 2).

2

Se introduce en la calculadora la fracción continua y se presiona [=]:

[6] [+] [▤] [1] [▼] [3] [+] [▤] [1] [▼] [1] [2] [+] [▤] [1] [▼] [1] [7] [=]



En consecuencia, finalmente se tiene que:

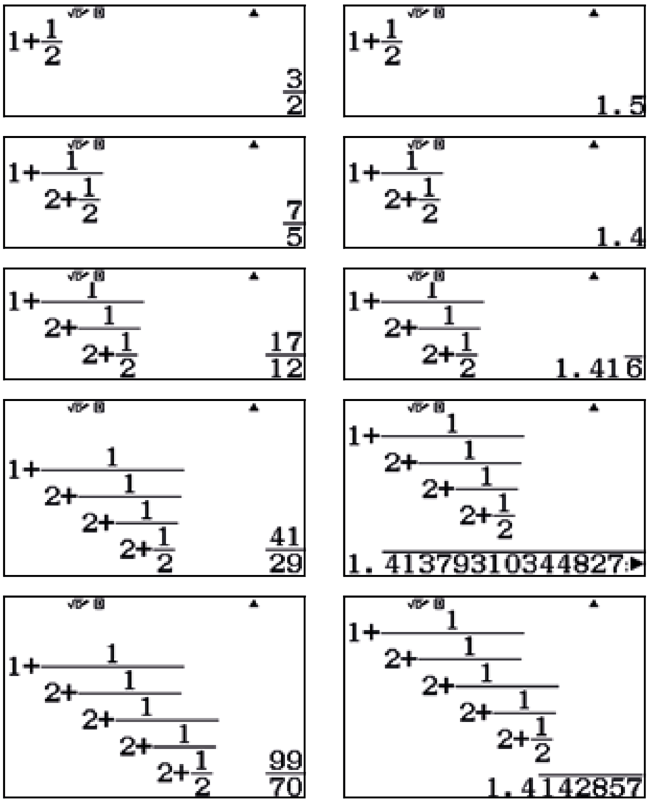
$$6 + \cfrac{1}{3 + \cfrac{1}{12 + \cfrac{1}{17}}} = \frac{3997}{632}$$

Como se puede observar, la fracción continua de un número racional es finita.

Descomposición de fracciones continuas

3

Algunas aproximaciones de $\sqrt{2}$ son:



Se puede comprobar que los cocientes de las fracciones continuas infinitas correspondientes a números irracionales cuadráticos son periódicos.

$\sqrt{3}$ $\longrightarrow$ cocientes $(1; \overline{1, 2})$

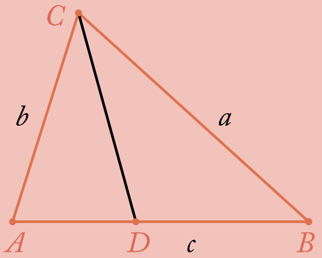
$\sqrt{11}$ $\longrightarrow$ cocientes $(3; \overline{3, 6})$

$\sqrt{19}$ $\longrightarrow$ cocientes $(4; \overline{2, 1, 3, 1, 2, 8})$

$\frac{1+\sqrt{5}}{2} = \Phi$ $\longrightarrow$ cocientes $(1; \overline{1})$

Problema

Propiedad de la bisectriz de un triángulo



En un triángulo $\widehat{ABC}$ la diferencia entre los lados b y a es de 24 m. La bisectriz del ángulo C divide el lado c en dos partes de manera que el segmento contiguo al lado b mide 26 m y el otro segmento mide 10 m. Calcula los lados del triángulo y clasifícalo según los ángulos.

La bisectriz interior de un triángulo divide el lado opuesto al ángulo en dos partes que son proporcionales a los lados que concurren en dicho ángulo. Así, sea CD la bisectriz del ángulo C, se tiene que:

$$\frac{\overline{BD}}{a} = \frac{\overline{AD}}{b}$$

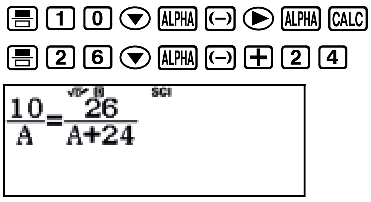
A partir del enunciado del problema se tiene que:

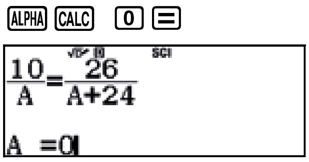
$$c = \overline{BD} + \overline{AD} = 36 \qquad b = a + 24$$

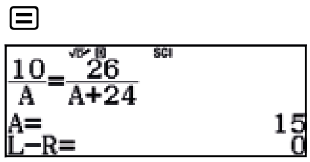
Sustituyendo estos términos en la primera expresión, se tiene:

$$\frac{10}{a} = \frac{26}{b} \Rightarrow \frac{10}{a} = \frac{26}{a+24}$$

Para resolver esta ecuación, en primer lugar se introduce la ecuación y, seguidamente, se aplica la función *SOLVE*, proporcionando un valor para la semilla:



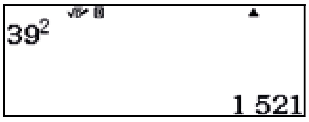




En consecuencia, a = 15 m, por lo que $b = a + 24 = 15 + 24 = 39$ m.

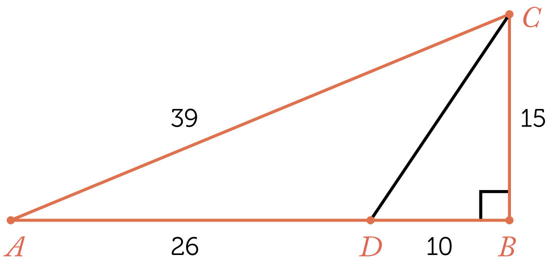
Para clasificar el triángulo, se puede aplicar el teorema de Pitágoras a los tres lados del triángulo. Si se verifica el teorema es que el triángulo es rectángulo:

Se calcula b^2.

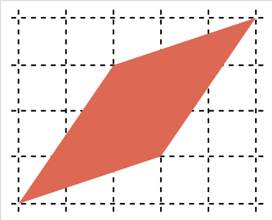


Se calcula $a^2 + c^2$.

Como los dos términos son iguales, el Teorema de Pitágoras se cumple, por lo que el triángulo es, necesariamente, rectángulo. Es decir, B = 90º.



17 | Operaciones
El jardín

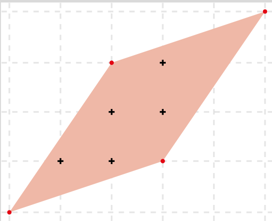


Existen diferentes métodos para calcular el área de un polígono. A continuación se presenta el enunciado de un problema real que pone de manifiesto este hecho.

En un terreno parcelado en cuadrados de 1 m de lado se quiere plantar un jardín con la forma que muestra la figura adjunta.

Para calcular el área del jardín se pueden seguir diferentes métodos:

Teorema de Pick



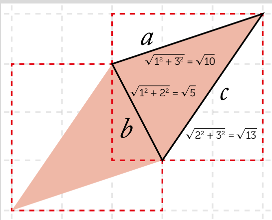
Dicho teorema afirma que el área de una figura reticular depende del número de puntos que hay en su interior y en su borde según la expresión:

$$A = I + \frac{B}{2} - 1$$

En esta expresión:

- I es el número de puntos interiores de la figura (representados por cruces negras). En este caso, $I = 6$.
- B es el número de puntos en el borde de la figura (representados por puntos rojos). En este caso, $B = 4$.

Fórmula de Herón de Alejandría

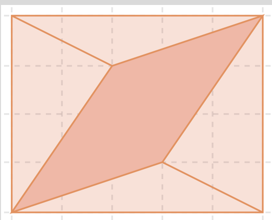


El jardín tiene forma de romboide. Tratar de calcular el área de este romboide aplicando la fórmula correspondiente nos metería en otro tipo de jardines. Si quisiéramos calcular el área de este modo, lo primero que deberíamos hacer es descomponer la figura en dos triángulos iguales. El problema estriba en que determinar las alturas de los triángulos es una tarea excesivamente complicada. El método más sencillo para determinar el área de la figura consiste en aplicar la fórmula de Herón a los triángulos que componen dicha figura. La fórmula de Heron proporciona el área de un triángulo a partir de sus lados.

$$A = \sqrt{S(S - a)(S - b)(S - c)}$$

Siendo S el semiperímetro del triángulo y a, b, y c las longitudes de los lados.

Descomposición geométrica



Una manera sencilla de calcular el área del jardín consiste en restar al área del rectángulo exterior las áreas de los cuatro triángulos que se muestran en la figura.

1 Calcula el área del jardín por el método del Teorema de Pick.

2 Calcula el área del jardín por el método de la Fórmula de Herón de Alejandría.

3 Calcula el área del jardín por el método de Descomposición geométrica.

El jardín

MATERIALES
Calculadora CASIO fx-82/85/350 SP X II Iberia

NIVEL EDUCATIVO
3º de ESO

ORIENTACIONES DIDÁCTICAS
- Una vez realizada la actividad, se pueden proponer otras figuras para que los alumnos determinen las áreas correspondientes.
- Esta actividad puede ser una buena ocasión para explicar el uso de las memorias que incorpora la calculadora.

EJEMPLO DE SOLUCIÓN

1 Teorema de Pick

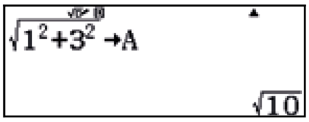
Tal y como se observa, la figura tiene 6 puntos interiores y 4 puntos en su borde. En consecuencia:

$$A = I + \frac{B}{2} - 1 = 6 + \frac{4}{2} - 1 = 7\ \text{u}^2$$

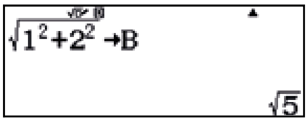
2 Fórmula de Herón de Alejandría

Se calculan los lados del triángulo (*a*, *b* y *c*) y el semiperímetro (*S*) y se almacenan los valores obtenidos en las variables *A*, *B*, *C* y *D*, respectivamente.

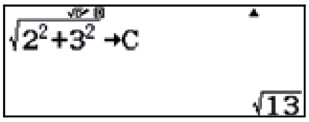
[√■] [1] [x²] [+] [3] [x²] [STO] [(–)] [=]



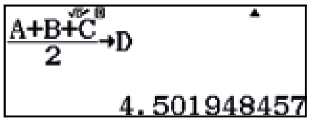
[√■] [1] [x²] [+] [2] [x²] [STO] [°'"] [=]



[√■] [2] [x²] [+] [3] [x²] [STO] [x⁻¹] [=]

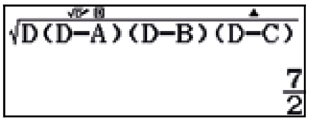


[■/■] [ALPHA] [(–)] [+] [ALPHA] [°'"] [+] [ALPHA] [x⁻¹] [▼] [2] [STO] [sen]



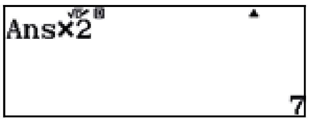
Seguidamente, se calcula el área de uno de los triángulos, aplicando la fórmula de Herón de Alejandría:

[√■] [ALPHA] [sen] [(] [ALPHA] [sen] [–] [ALPHA] [(–)] [)] [(] [ALPHA] [sen] [–] [ALPHA] [°'"] [)] [(] [ALPHA] [sen] [–] [ALPHA] [x⁻¹] [)] [=]



Una vez se tiene el área de uno de los triángulos, se multiplica por 2, puesto que los dos triángulos son iguales, obteniéndose así el área de la figura.

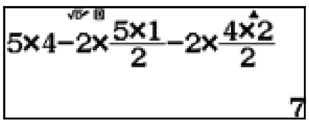
[Ans] [×] [2] [=]



3 Descomposición geométrica

El área del jardín es igual al área del rectángulo externo (base por altura, 5×4) menos las áreas de los 4 triángulos, que son iguales dos a dos.

[5] [×] [4] [–] [2] [×] [5] [■/■] [×] [1] [▼] [2] [▶] [–] [2] [×] [■/■] [4] [×] [2] [▼] [2]



18 | Operaciones
Verificar - Veryflipar!

Un profesor de matemáticas le ha encomendado a uno de sus alumnos la ardua tarea de resolver el apartado g) del ejercicio 89 del libro de texto:

$$\frac{19}{5} - \left(\frac{3}{4} - \frac{1}{7}\right) \times \frac{2}{6} : \frac{4}{9}$$

El alumno ha realizado todos los cálculos y ha obtenido $\frac{409}{255}$ como resultado final. Sin embargo, al comprobar el resultado con la calculadora, ha obtenido un valor distinto. Concretamente, este:

A continuación se muestran los cálculos que ha realizado:

$$\frac{19}{5} - \left(\frac{3}{4} - \frac{1}{7}\right) \cdot \frac{2}{6} : \frac{4}{9} = \frac{19}{5} - \left(\frac{3}{4} - \frac{1}{7}\right) \cdot \frac{1}{3} : \frac{4}{9} =$$

$$= \frac{19}{5} - \left(\frac{3 \cdot 7}{28} - \frac{1 \cdot 4}{28}\right) \cdot \frac{1}{3} : \frac{4}{9} = \frac{19}{5} - \left(\frac{21}{28} - \frac{4}{28}\right) \cdot \frac{1}{3} : \frac{4}{9} =$$

$$= \frac{19}{5} - \frac{17}{28} \cdot \frac{1}{3} : \frac{4}{9} = \frac{19}{5} - \frac{17 \cdot 1}{28 \cdot 3} : \frac{4}{9} =$$

$$= \frac{19}{5} - \frac{17}{84} : \frac{4}{9} = \frac{19}{5} - \frac{84 \cdot 4}{17 \cdot 9} =$$

$$= \frac{19}{5} - \frac{336}{153} = \frac{19 \cdot 153}{765} - \frac{336 \cdot 5}{765} =$$

$$= \frac{2907 - 1680}{765} = \frac{1227}{765} = \frac{409}{255}$$

1 ¿Qué ha ocurrido? En algún paso se ha equivocado, pero, ¿en cuál? Halla la respuesta usando tu calculadora.

2 Utiliza la calculadora para comprobar otros cálculos que hayas tenido que realizar a mano.

18 | Operaciones
Verificar - Veryflipar!

MATERIALES

Calculadora CASIO fx-82/85/350 SP X II Iberia

NIVEL EDUCATIVO

3º de ESO

ORIENTACIONES DIDÁCTICAS Y TÉCNICAS

- La actividad puede servir para repasar las operaciones con números fraccionarios y la prioridad de las operaciones.
- Para resolver esta actividad se ha de usar el menú *Verificar*, al que se accede mediante MENU 4.
- Para introducir el signo = que separa los dos miembros de una igualdad hay que pulsar OPTN 1.

EJEMPLO DE SOLUCIÓN

1

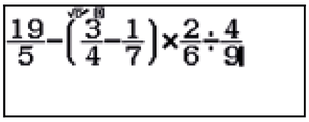
Para comprobar que el cálculo se ha realizado correctamente se introduce la expresión matemática seguida del signo igual (mediante OPTN 1). A continuación, se introduce el segundo miembro y se pulsa =. La calculadora devolverá un mensaje indicando si la primera igualdad es verdadera o falsa.

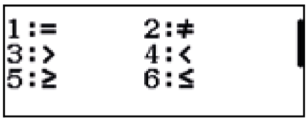
1 9 ▤ 5 ▶ − (
3 ▤ 4 − 1 ▤ 7
▶) × 2 ▤ 6 ▶
÷ 4 ▤ 9

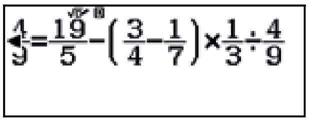
OPTN 1

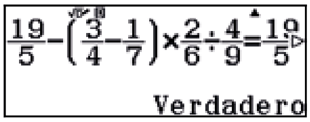
1 9 ▤ 5 ▶ − (
3 ▤ 4 ▶ − 1 ▤
7 ▶) × 1 ▤ 3
▶ ÷ 4 ▤ 9

=







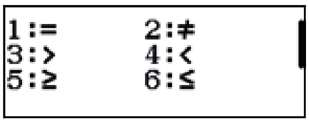


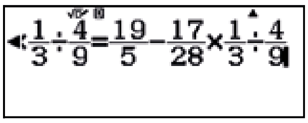
Acto seguido se introduce el siguiente término y se comprueba si la igualdad es verdadera o falsa.

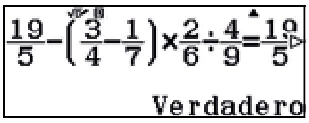
OPTN 1

1 9 ▤ 5 ▶ − (
3 ▤ 4 ▶ − 1 ▤
7 ▶) × 1 ▤ 3
▶ ÷ 4 ▤ 9

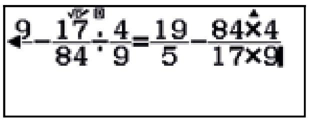
=

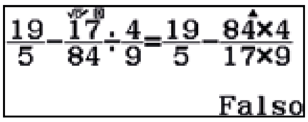






Y así sucesivamente hasta dar con una igualdad incorrecta.





Como se observa, el error está en que la división $\frac{17}{84} : \frac{4}{9}$ se ha realizado incorrectamente.

2

Respuesta abierta.

19 | Potencias y radicales
Figuras geométricas reales


En la Plaza del Depósito del Sol, en Albacete, nos podemos encontrar con muchos cuerpos geométricos, como la biblioteca municipal. Se trata de un antiguo depósito de agua construido en 1921 y convertido en biblioteca en 1994 que consta de varios cuerpos geométricos, entre los que destaca una torre cilíndrica de 19 m de altura por 15 m de diámetro y una sala de estudio de planta cuadrada de 400 m^2 de superficie.

Al lado de la biblioteca se encuentra un pequeño parque infantil en el que se halla una construcción formada por dodecaedros de 67 cm de lado.

1 Responde, con la ayuda de la calculadora, a las siguientes preguntas:

a) ¿Cuánto mide el lado de la sala de estudio de planta cuadrada?

b) ¿Cuál es el volumen de la torre cilíndrica?

c) Averigua las fórmulas que permiten calcular la superficie y el volumen del dodecaedro en función de su lado.

d) ¿Cuánto mide la superficie de la construcción formada por dodecaedros que se encuentra en el parque infantil? Calcula solo la superficie correspondiente a las caras visibles.

e) ¿Cuál es el volumen total de la construcción?

2 Muchas construcciones arquitectónicas se realizan uniendo diferentes cuerpos geométricos. Los programas GeoGebra y Stella4D permiten unir cuerpos geométricos y visualizar el resultado de dicha unión. Intenta unir varios sólidos platónicos con la ayuda de estos programas y observa el resultado.

3 Construye algunos sólidos platónicos con papel y únelos con pegamento. Describe la construcción resultante.

Figuras geométricas reales

MATERIALES

Calculadora CASIO fx-570/991 SP X II Iberia,
programas GeoGebra y Stella4D y papel o cartulina.

NIVEL EDUCATIVO

3º de ESO

ORIENTACIONES DIDÁCTICAS

- Esta actividad está pensada para que los alumnos vean su entorno con ojos matemáticos y puedan apreciar la presencia de la geometría en la vida cotidiana, así como su contribución al embellecimiento del entorno.
- Se pretende que los alumnos realicen búsquedas en Internet de conceptos matemáticos; en este caso, de las expresiones que proporcionan el área y el volumen del ortoedro, expresiones estas que contienen muchos radicales anidados.
- El hecho de que la calculadora realice los cálculos en notación natural puede animar a los alumnos a realizar estos complicados cálculos, sintiendo que los hacen del mismo modo que en la pizarra de clase.
- Puede ser este un buen momento para introducir otros recursos, como GeoGebra, Stella4D o la papiroflexia matemática. Estos recursos pueden contribuir a hacer las matemáticas más divertidas y a darles un nuevo sentido, más allá del mero cálculo.

EJEMPLO DE SOLUCIÓN

1

a) La superficie de la sala cuadrada se calcula mediante la expresión $A = a^2$, siendo a el lado de la sala. En consecuencia, el lado a se expresa como $a = \sqrt{A}$.

[√■] [4] [0] [0] [=]

$$\sqrt{400} \qquad 20$$

Luego, el lado de la sala mide 20 m.

b) El volumen del cilindro se calcula según $V = \pi r^2 h$.

[SHIFT] [×10ˣ] [(] [■/□] [1] [5] [▼]
[2] [▶] [)] [x²] [×] [1] [9] [=] [S⇔D]

$$\pi\left(\frac{15}{2}\right)^2\times 19 \qquad \frac{4\,275}{4}\pi$$

$$\pi\left(\frac{15}{2}\right)^2\times 19 \qquad 3\,357.577149$$

Luego, el volumen del depósito cilíndrico es de aproximadamente 3 357 m³.

c) Las fórmulas que permiten calcular el área y el volumen de un dodecaedro regular en función de su arista son:

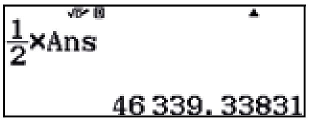
$$A = 15a^2\sqrt{\frac{5+2\sqrt{5}}{5}} \qquad V = \frac{5a^3}{2}\sqrt{\frac{47+21\sqrt{5}}{10}}$$

d) Dado que la longitud de la arista es de 67 cm, el área de cada dodecaedro es:

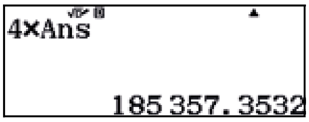
[1] [5] [×] [6] [7] [x²] [√■] [■/□]
[5] [+] [2] [√■] [5] [▼] [5] [=]

$$15\times 67^2\sqrt{\frac{5+2\sqrt{5}}{5}} \qquad 92\,678.67661$$

El área visible es la mitad del área del dodecaedro:

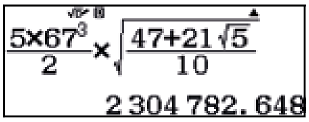


Como la estructura está formada por 4 dodecaedros, el área visible de la estructura es:

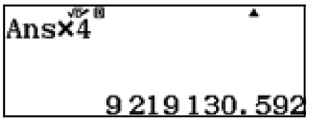


Es decir, 185 357 cm^2, o lo que es lo mismo, 18,5357 m^2.

e) El volumen de cada dodecaedro es:



En consecuencia, el volumen total de la construcción resulta:



Así, pues, el volumen total de la construcción es de 9 219 130 cm^3, o, lo que es lo mismo, de 9,219130 m^3.

2

Respuesta abierta.

3

Respuesta abierta.

Problema

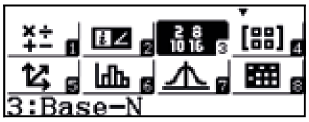
Contando en otros sistemas

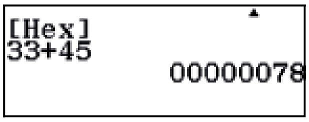
Un profesor afirma que en el salón de actos hay 100 estudiantes, de los cuales 33 son chicos y 45 chicas. ¿En qué sistema de numeración está contando el profesor? ¿Cuántas personas hay en el salón de actos?

Obviamente, el profesor no está contando en el sistema decimal; pero tampoco en el sistema binario, ya que aparecen dígitos diferentes a 0 y a 1.

Se puede probar a realizar la operación con otros sistemas de numeración, como por ejemplo el sistema hexadecimal:

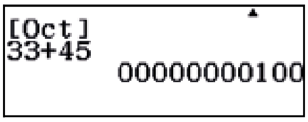
MENU 3 $x^{■}$





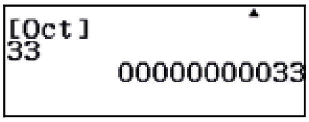
Pero 33 + 45 no suman 100 en el sistema hexadecimal, luego, debe probarse con otros sistemas como, por ejemplo, el octal.

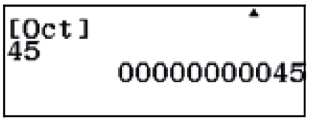
AC ln



Por tanto, el profesor ha contado en el sistema octal:

AC 3 3 = x^2 AC ln 4 5 = x^2





Hay 64 estudiantes, de los cuales 27 son chicos y 37 son chicas.

Otra manera de resolver el problema es reducirlo a la resolución de una ecuación de segundo grado.

Sea x la base del sistema de numeración en el que cuenta el profesor, se tiene:

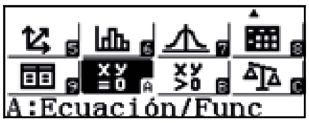
$100_x = 1 \cdot x^2 + 0 \cdot x^1 + 0 \cdot x^0 = x^2$

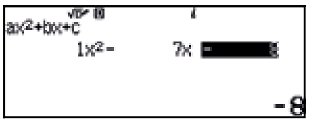
$33_x = 3 \cdot x^1 + 3 \cdot x^0 = 3x + 3$

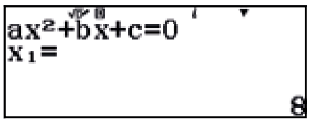
$45_x = 4 \cdot x^1 + 5 \cdot x^0 = 4x + 5$

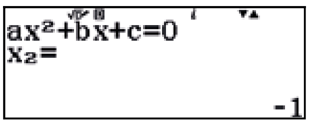
Por tanto:

$x^2 = (3x + 3) + (4x + 5) \longrightarrow x^2 - 7x - 8 = 0$



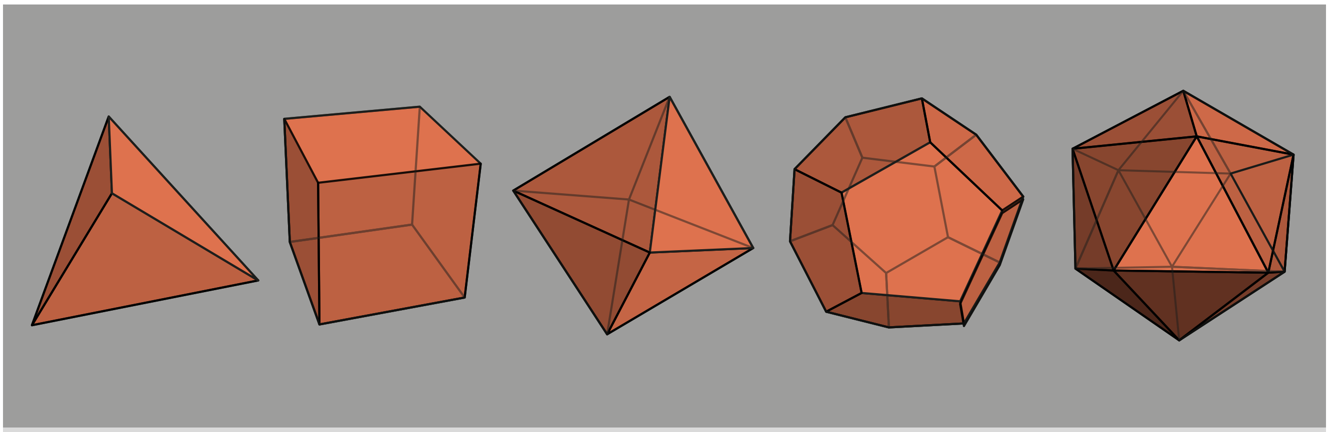






En consecuencia, la base utilizada es $x = 8$.

20 | Potencias y radicales
Sólidos platónicos



Un sólido platónico es un cuerpo geométrico con las siguientes características:

- Sus caras son polígonos regulares iguales.
- En cada vértice concurre el mismo número de caras.
- Cumple la fórmula de Euler:
  caras + vértices = aristas + 2

Existen cinco sólidos platónicos: el tetraedro, el cubo o hexaedro, el octaedro, el dodecaedro y el icosaedro.

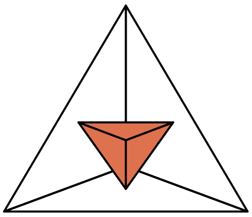
Los sólidos platónicos se conocen desde la antigüedad y fueron estudiados y utilizados ampliamente por los antiguos griegos, que incluso les otorgaron propiedades mágicas. Estos cuerpos geométricos deben su nombre a Platón, quien, junto con Pitágoras, fue uno de los primeros sabios en estudiarlos.

En el siglo XVII Kepler intentó explicar el movimiento de los planetas en el sistema solar combinando sólidos platónicos, si bien hoy sabemos que las órbitas de los planetas no se corresponden en absoluto con estos cuerpos.

1 Rellena la siguiente tabla haciendo uso de la calculadora. Puedes buscar en Internet las fórmulas que permiten determinar los volúmenes y las áreas de los sólidos platónicos a partir de sus aristas.

SÓLIDO PLATÓNICO	FÓRMULA DE LA SUPERFICIE	FÓRMULA DEL VOLUMEN	TAMAÑO DE LA ARISTA	SUPERFICIE	VOLUMEN
tetraedro			2		
hexaedro			2		
octaedro			2		
dodecaedro			2		
icosaedro			2		

2 Si se unen con segmentos los centros de las caras contiguas de un sólido platónico se obtiene otro poliedro. En la figura de la derecha se observa un tetraedro de 2 cm de arista y su dual, otro tetraedro de 0,6666…cm de arista.



a) Calcula el volumen del tetraedro de arista 2 y el volumen del tetraedro dual de arista 0,6666…

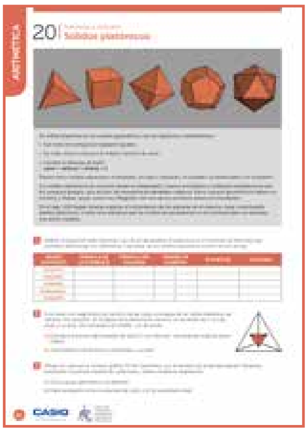
b) ¿Qué relación existe entre un tetraedro y su dual?

3 Dibuja un cubo en la ventana gráfica 3D de GeoGebra, con el tamaño de arista que desees. Después, encuentra los puntos medios de cada cara y únelos mediante segmentos.

a) ¿Qué cuerpo geométrico se obtiene?

b) Halla la relación entre el volumen del cubo y el de su poliedro dual.

20 | Potencias y radicales
Sólidos platónicos



MATERIALES
Calculadora CASIO fx-82/85/350 SP X II Iberia, ordenador o tablet para consultar Internet y poder contestar a las preguntas, programa GeoGebra.

NIVEL EDUCATIVO
3º de ESO

ORIENTACIONES DIDÁCTICAS

- Se pretende que los alumnos realicen búsquedas en Internet de conceptos matemáticos; en este caso, de las expresiones que proporcionan las áreas y los volúmenes de los sólidos platónicos.
- El hecho de que la calculadora realice los cálculos en notación natural puede animar a los alumnos a realizar estos complicados cálculos, considerando que los hacen del mismo modo que el que se observa en la pizarra de clase.
- Puede ser este un buen momento para introducir otros recursos, como GeoGebra, que puede contribuir a hacer las matemáticas más divertidas y a darles un nuevo sentido, más allá del mero cálculo.

EJEMPLO DE SOLUCIÓN

1

Las fórmulas de las superficies y los volúmenes de los sólidos platónicos en función de sus aristas son las siguientes:

SÓLIDO PLATÓNICO	FÓRMULA DE LA SUPERFICIE	FÓRMULA DEL VOLUMEN
tetraedro	$a^2\sqrt{3}$	$\frac{a^3}{12}\sqrt{2}$
hexaedro	$6a^2$	a^3
octaedro	$2a^2\sqrt{3}$	$\frac{a^3\sqrt{2}}{3}$
dodecaedro	$15a^2\sqrt{\frac{5+2\sqrt{5}}{5}}$	$\frac{5a^3}{2}\sqrt{\frac{47+21\sqrt{5}}{10}}$
icosaedro	$5a^2\sqrt{3}$	$\frac{5a^3}{6}\sqrt{\frac{7+3\sqrt{5}}{2}}$

A continuación se calculan las áreas y los volúmenes para cuerpos geométricos de arista 2

SÓLIDO PLATÓNICO	SUPERFICIE	VOLUMEN
tetraedro	[2] [x²] [√■] [3] [=] $2^2\sqrt{3}$ → $4\sqrt{3}$	[▭/▭] [2] [x■] [3] [▼] [1] [2] [▶] [√■] [2] [=] $\frac{2^3}{12}\sqrt{2}$ → $\frac{2\sqrt{2}}{3}$
hexaedro	[6] [×] [2] [x²] [=] 6×2^2 → 24	[2] [x■] [3] [=] 2^3 → 8
octaedro	[2] [×] [2] [x²] [√■] [3] [=] $2\times2^2\times\sqrt{3}$ → $8\sqrt{3}$	[▭/▭] [2] [x■] [3] [▶] [√■] [2] [▼] [3] [=] $\frac{2^3\sqrt{2}}{3}$ → $\frac{8\sqrt{2}}{3}$

Sólidos platónicos

SÓLIDO PLATÓNICO	SUPERFICIE	VOLUMEN
dodecaedro	[1] [5] [×] [2] [x^2] [√▭] [▭/▭] [5] [+] [2] [√▭] [5] [▼] [5] [=] $15\times2^2\sqrt{\frac{5+2\sqrt{5}}{5}}$ 82.58291523	[▭/▭] [5] [×] [2] [$x^■$] [3] [▼] [2] [▶] [√▭] [▭/▭] [4] [7] [+] [2] [1] [√▭] [5] [▼] [1] [0] [=] $\frac{5\times2^3}{2}\sqrt{\frac{47+21\sqrt{5}}{10}}$ 61.30495168
icosaedro	[5] [×] [2] [x^2] [×] [√▭] [3] [=] $5\times2^2\times\sqrt{3}$ $20\sqrt{3}$	[5] [×] [2] [$x^■$] [3] [▼] [6] [▶] [×] [DEL] [√▭] [▭/▭] [7] [+] [3] [√▭] [5] [▼] [2] [=] $\frac{5\times2^3}{6}\sqrt{\frac{7+3\sqrt{5}}{2}}$ 17.45355993

2

a) El volumen del tetraedro de arista 2 es, como ya se ha visto:

$$\frac{2^3}{12}\sqrt{2} \qquad \frac{2\sqrt{2}}{3}$$

En cuanto al volumen del tetraedro de arista 0,6666..., resulta:

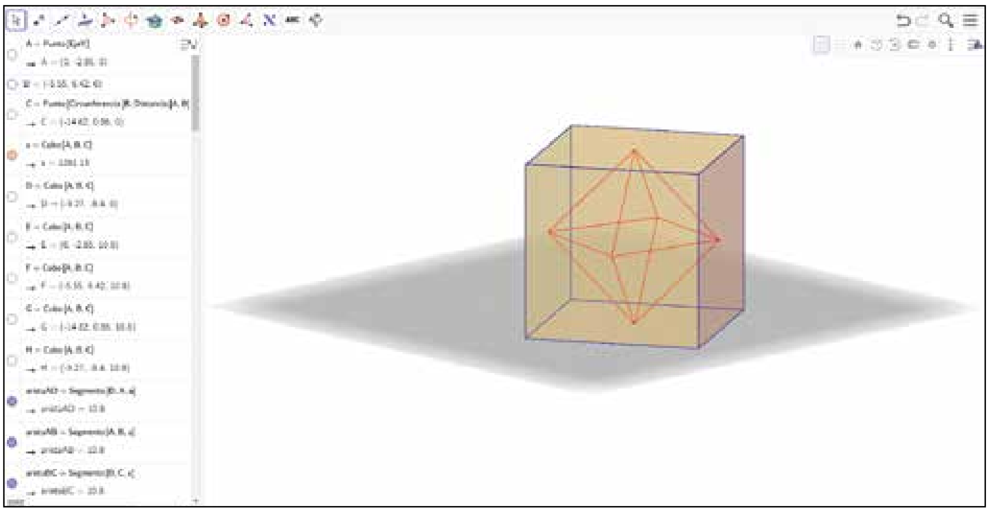
$$\frac{0.\overline{6}^3}{12}\sqrt{2} \qquad \frac{2\sqrt{2}}{81}$$

b) La relación entre el volumen del tetraedro y el volumen de su tetraedro dual es:

$$\frac{2\sqrt{2}}{3} \div \frac{2\sqrt{2}}{81} \qquad 27$$

3

a) Se obtiene un octaedro.



Problema

Tres camareros

Tres camareros se reparten 350 € en partes directamente proporcionales al número de horas que han trabajado durante un festivo. Si Pedro ha trabajado 5 h; Rosa, 7 h, y Julián, 8 h, ¿qué cantidad le corresponde a cada uno?

El número total de horas trabajadas es: 5 + 7 + 8 = 20 horas. Por tanto, a cada hora de trabajo le corresponde la siguiente remuneración:

```
350÷20
                17.5
```

En consecuencia, la cantidad que le corresponde a cada camarero es:

Pedro

```
17.5×5
                87.5
```

Rosa

```
17.5×7
               122.5
```

Julián

```
17.5×8
                 140
```

Se comprueba que la suma del reparto es de 350 €:

```
Ans+PreAns+87.5
                 350
```

Problema

Dos comunidades de vecinos

Dos comunidades de vecinos instalan una antena comunitaria cuyo coste alcanza los 1 560 €. En la primera comunidad viven 75 vecinos y en la segunda 55 y deciden pagar proporcionalmente según el número de vecinos. ¿Cuánto debe pagar cada comunidad? ¿Y cada vecino?

En total hay 130 vecinos, que tienen que pagar una antena que cuesta 1 560 €. Por tanto, cada vecino deberá abonar 12 €:

```
1560÷130
                  12
```

En consecuencia, el bloque compuesto por 75 vecinos tendrá que abonar:

```
12×75
                 900
```

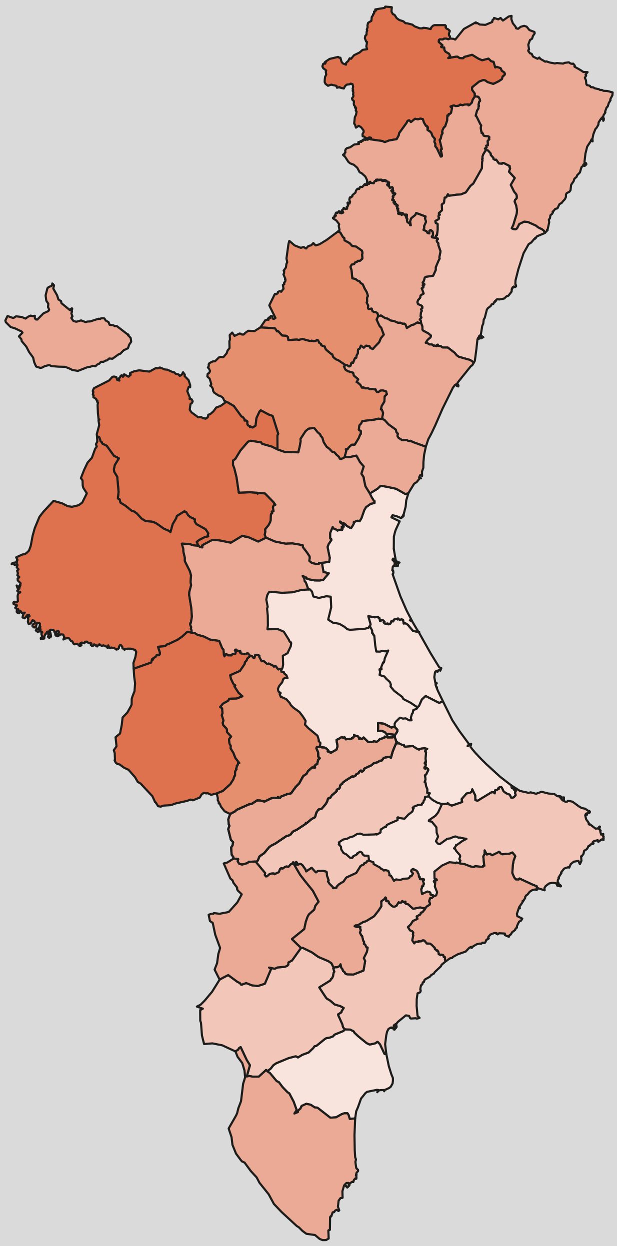
Y el bloque compuesto por 55 vecinos habrá de abonar:

```
12×55
                 660
```

21 | Potencias y radicales
La comarca superpoblada

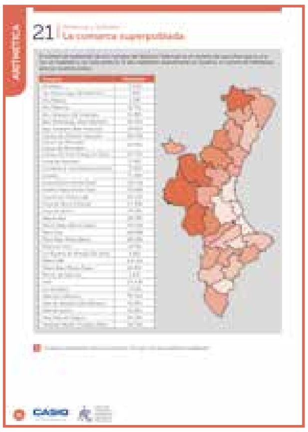
El número de habitantes de una comarca de Valencia (València) es un número de seis cifras que es a la vez un cuadrado y un cubo perfecto. Si seis habitantes abandonaran la comarca, el número de habitantes sería un número primo.

Comarca	Población
Alcalatén	17 226
Alto Maestrazgo (Alt Maestrat)	7 846
Alto Mijares	4 386
Alto Palancia	24 732
Alto Vinalopó (Alt Vinalopó)	52 899
Bajo Maestrazgo (Baix Maestrat)	80 334
Bajo Vinalopó (Baix Vinalopó)	279 815
Campo de Alicante (Alacantí)	455 292
Campo de Morvedre (Camp de Morvedre)	85 355
Campo de Turia (Camp de Túria)	135 373
Canal de Navarrés	17 691
Condado de Cocentaina (Comtat)	27 854
Costera	72 089
Huerta Norte (Horta Nord)	209 519
Huerta Oeste (Horta Oest)	331 698
Huerta Sur (Horta Sud)	163 253
Hoya de Alcoy (L'Alcoià)	117 649
Hoya de Buñol	39 768
Marina Alta	188 567
Marina Baja (Marina Baixa)	179 546
Plana Alta	248 098
Plana Baja (Plana Baixa)	185 986
Requena-Utiel	39 386
Los Puertos de Morella (Els Ports)	5 262
Ribera Alta	216 211
Ribera Baja (Ribera Baixa)	80 360
Rincón de Ademuz	2 605
Safor	176 238
Los Serranos	17 936
Valencia (València)	797 654
Valle de Albaida (Vall d'Albaida)	90 783
Valle de Ayora	10 566
Vega Baja del Segura	361 292
Vinalopó Medio (Vinalopó Mitjà)	168 532



1 ¿Cuántos habitantes tiene la comarca? ¿De qué comarca estamos hablando?

La comarca superpoblada



MATERIALES

Calculadora CASIO fx-82/85/350 SP X II Iberia

NIVEL EDUCATIVO

3º de ESO

ORIENTACIONES DIDÁCTICAS

- Muchos problemas se pueden resolver de diferentes maneras. Este problema en concreto se puede resolver utilizando el ensayo y error, que consiste en seguir los siguientes pasos:

  1. Se elige un valor (resultado, operación o propiedad) posible.
  2. Se llevan a cabo con este valor las condiciones indicadas por el problema.
  3. Se comprueba si se ha alcanzado el objetivo buscado.

  Según haya intención o no el ensayo y error puede ser:

  1. Fortuito: realizado sin pautas o al azar.
  2. Sistemático: los valores no se eligen a la ventura, sino de manera ordenada, de forma que se eliminen las posibles repeticiones de ensayo, agotando las soluciones posibles hasta encontrar la buscada.
  3. Dirigido: se contrasta cada respuesta para ver si se está más cerca o más lejos del objetivo buscado.

EJEMPLO DE SOLUCIÓN

1

La solución que se propone corresponde a la ofrecida por una alumna de 4º de ESO en el curso 2015-2016. En primer lugar, se consideran las raíces cúbicas de los extremos del intervalo formado por todos los números de seis cifras.

$\sqrt[3]{100000}$	$\sqrt[3]{1000000}$
46.41588834	100

Seguidamente, se consideran las raíces cuadradas de las raíces cúbicas obtenidas:

$\sqrt{46}$	$\sqrt{100}$
6.782329983	10

Luego, el número de habitantes debe ser la potencia sexta de uno de los números naturales del intervalo (6, 10):

$(7^2)^3$	$(8^2)^3$	$(9^2)^3$
117 649	262 144	531 441

Se restan 6 unidades a los números anteriores y se considera el resultado que sea un número primo:

$(7^2)^3-6$	$(8^2)^3-6$	$(9^2)^3-6$
117 643	262138	531435

262 138 es un número par, por tanto no es primo.

531 435 es divisible por 5, luego no es primo.

117 643 es primo, como puede comprobarse usando la función *FACT* (SHIFT °'").

En consecuencia, el número de habitantes es 117 649, por lo que la comarca en cuestión resulta ser Hoya de Alcoy (L'Alcoià).

22 | Expresión decimal de fracciones
Midiendo la longitud del meridiano terrestre

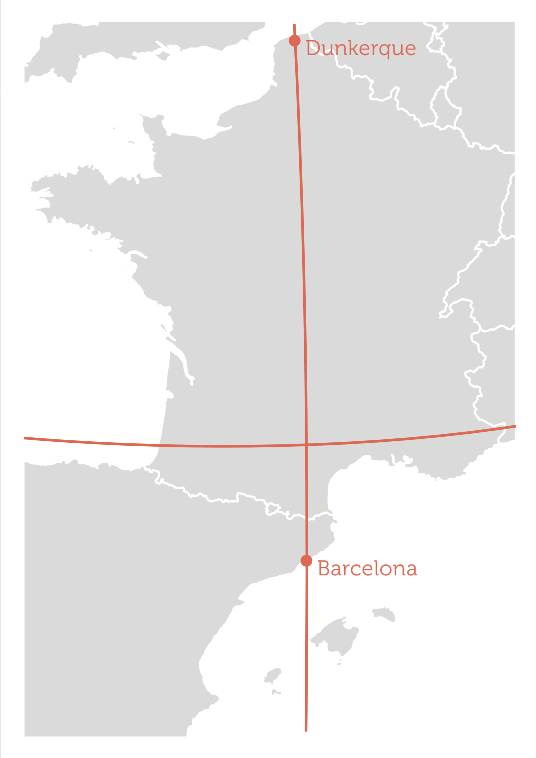
El 25 de junio de 1792, Pierre Méchain y Jean-Baptiste Delambre iniciaron los trabajos para la determinación de la longitud del meridiano que pasa por París.

El encargo provenía de la Academia de Ciencias de París, que propuso la adopción de un patrón de longitud procedente de la naturaleza: el metro, definido como la diezmillonésima parte del cuadrante de un meridiano terrestre.

Ante la imposibilidad de medir todo un cuarto de meridiano desde el polo Norte al Ecuador, la solución adoptada fue medir una parte y calcular matemáticamente el valor del total.

El arco de meridiano escogido en la propuesta de la academia fue el comprendido entre Dunkerque (latitud N 51° 2′ 9,20″) y Barcelona (latitud N 41° 21′ 44,95″).

Los astrónomos y geodestas franceses pretendían determinar, mediante técnicas de triangulación, la longitud del arco comprendido entre estas dos ciudades, situadas sobre dicho meridiano.



1 ¿Qué resultado crees que deberían haber obtenido, aproximadamente?

Nota: Considera que la Tierra es un planeta esférico de radio R = 6 370 km y que la longitud de arco de una circunferencia es $L = 2\pi R \frac{n}{360°}$, donde R es el radio de la circunferencia y n el arco expresado en grados sexagesimales.

2 Compara el resultado que has obtenido con el que se obtiene de Google Maps.

Midiendo la longitud del meridiano terrestre

MATERIALES
Calculadora CASIO fx-82/85/350 SP X II Iberia

NIVEL EDUCATIVO
3º de ESO

ORIENTACIONES DIDÁCTICAS
- Antes de realizar esta actividad conviene haber estudiado previamente las coordenadas terrestres (latitud y longitud).

EJEMPLO DE SOLUCIÓN

1

Se puede suponer, como primera aproximación, que Dunkerque y Barcelona tienen la misma longitud y, por tanto, pertenecen al mismo meridiano.

En ese caso, la distancia entre ambas localidades se puede calcular mediante:

$$L = 2\pi \cdot 6\,370 \cdot \frac{51^{\circ}\,2'\,9{,}20'' - 41^{\circ}\,21'\,44{,}95''}{360^{\circ}}$$

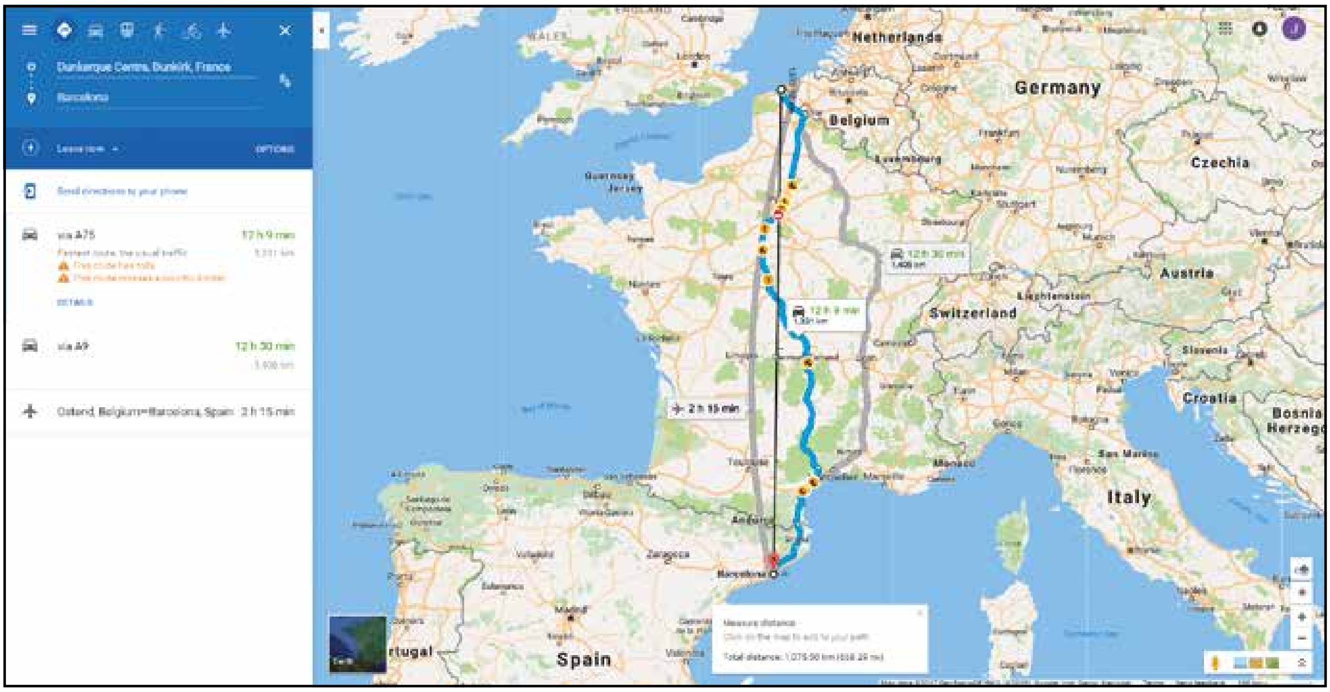
Dicho cálculo puede realizarse con la calculadora, haciendo uso de la tecla °’”.

$$2\pi\times6370\times\frac{51^{\circ}2^{\circ}9.20^{\circ}-41^{\circ}21^{\circ}44.95^{\circ}}{360^{\circ}}$$

1075.46448

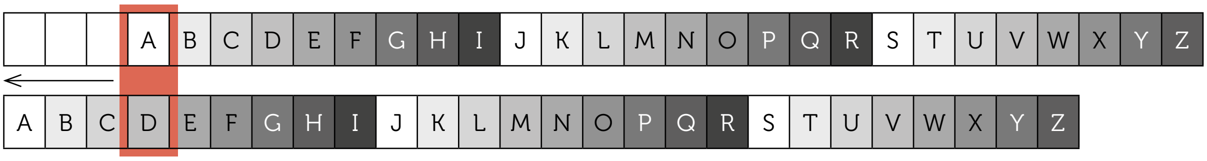
La distancia aproximada entre las dos localidades resulta ser de 1 075 km.

Utilizando la autopista A75 de Francia, la distancia entre ambas ciudades es de 1 331 km. Sin embargo, si se toma la distancia en línea recta, se obtiene un resultado de 1 075,5 km mucho más próximo al calculado teóricamente.



23 | Codificación
Criptología. El cifrado César

El cifrado César, también conocido como cifrado por desplazamiento, código de César o desplazamiento de César, es una de las técnicas de cifrado más simples y que más se ha usado a lo largo de la historia. Se trata de un tipo de cifrado por sustitución en el que cada letra del texto original es reemplazada por otra letra que se encuentra adelantada un número fijo de posiciones en el alfabeto. Por ejemplo, con un desplazamiento de 3, la letra A sería sustituida por la letra D, la letra B sería reemplazada por la letra E, etc. Este método de codificación debe su nombre a Julio César, quien lo usaba para comunicarse con sus generales.



» El cifrado César desplaza cada letra un determinado número de espacios en el alfabeto. En este ejemplo se utiliza un desplazamiento de tres espacios, de modo que una letra A en el texto original se convierte en una letra D en el texto codificado.

En muchas ocasiones el cifrado César forma parte de sistemas más complejos de codificación, como el cifrado Vigenère o, incluso, el sistema ROT13. Como todos los cifrados de sustitución alfabética simple, el cifrado César se descifra con facilidad, por lo que, en la práctica no protege las comunicaciones con demasiada seguridad.

Desde el punto de vista matemático, el cifrado César puede ser modelizado mediante una operación de suma en aritmética modular 26. Así, cada letra del alfabeto latino (de la A a la Z) queda identificada por un entero de 0 a 25. El texto plano se codifica introduciendo el desplazamiento de tres posiciones, es decir, sumando el valor de la clave (en este caso, 3). En consecuencia:

<letra encriptada> = (<letra plana> + clave)**mod**26

<letra plana> = (<letra encriptada> - clave)**mod**26

letra	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J	K	L	M	N	O	P	Q	R	S	T	U	V	W	X	Y	Z
código	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20	21	22	23	24	25

1 Codifica y decodifica el siguiente mensaje utilizando una clave de desplazamiento de valor 8:

Texto original: WIKIPEDIA, LA ENCICLOPEDIA LIBRE

Texto codificado:

2 Investiga la frecuencia de aparición de las diferentes letras en el idioma castellano. Selecciona un texto de muestra de no menos de 50 palabras y codifícalo con un cifrado César con clave de desplazamiento 12. Construye la tabla de frecuencias de aparición de las letras en el texto codificado y compáralo con la frecuencia teórica de los textos en castellano. Explica las conclusiones a las que llegas.

23 | Codificación
Criptología. El cifrado César

MATERIALES
Calculadora CASIO fx-570/991 SP X II Iberia

NIVEL EDUCATIVO
3º de ESO

ORIENTACIONES DIDÁCTICAS Y TÉCNICAS

- Se ha propuesto esta actividad para, además de tratar los contenidos curriculares correspondientes, analizar y valorar la importancia de los sistemas de codificación y encriptación.
- Para realizar las actividades, se hace uso de la funcionalidad *CALC*, que permite hallar el valor numérico de una expresión algebraica a partir del valor de las correspondientes variables. También se utiliza la función *Int*, a la que se accede mediante [ALPHA] [+]. Dicha función proporciona la parte entera de un número.

EJEMPLO DE SOLUCIÓN

1

Para codificar el mensaje utilizando una clave de desplazamiento de valor 8 hay que sumar 8 al valor numérico de cada letra, teniendo en cuenta que el máximo valor numérico que puede corresponder a una letra es 25, por lo que, una vez alcanzado este valor, se empieza a contar desde el cero.

Se designa con A el valor numérico correspondiente a la letra en cuestión y se introduce la siguiente expresión:

[(] [ALPHA] [(−)] [+] [8] [)] [−] [ALPHA] [+] [(] [ALPHA] [(−)] [+] [8] [)] [÷] [2] [6] [)] [×] [2] [6] [=]

$$(A+8)-\text{Int}\left(\frac{A+8}{26}\right)\times 26$$

Seguidamente se accede a la función *CALC* y se introducen los valores numéricos de las letras que forman el texto original:

W – 22

$$(A+8)-\text{Int}\left(\frac{A+8}{26}\right)\times 26$$
A =22

⇓

$$(A+8)-\text{Int}\left(\frac{A+8}{26}\right)\times 26$$
4

4 – E

I – 8

$$(A+8)-\text{Int}\left(\frac{A+8}{26}\right)\times 26$$
A =8

⇓

$$(A+8)-\text{Int}\left(\frac{A+8}{26}\right)\times 26$$
16

16 – Q

K – 10

$$(A+8)-\text{Int}\left(\frac{A+8}{26}\right)\times 26$$
A =10

⇓

$$(A+8)-\text{Int}\left(\frac{A+8}{26}\right)\times 26$$
18

18 – S

I – 8

$$(A+8)-\text{Int}\left(\frac{A+8}{26}\right)\times 26$$
A =8

⇓

$$(A+8)-\text{Int}\left(\frac{A+8}{26}\right)\times 26$$
16

16 – Q

Procediendo análogamente con todas las letras se obtiene el mensaje codificado:

W	I	K	I	P	E	D	I	A		L	A		E	N	C	I	C	L	O	P	E	D	I	A		L	I	B	R	E
E	Q	S	Q	X	M	L	Q	I		T	I		M	V	K	Q	K	T	W	X	M	L	Q	I		T	Q	J	Z	M

24 | Problemas aritméticos
Aumentos y descuentos proporcionales

Eva desea cambiar de teléfono móvil y se dispone a realizar un estudio comparativo sobre las prestaciones y los precios de diferentes modelos a partir del siguiente folleto publicitario, que ha adquirido en la tienda MyPhone. En el folleto se muestran los precios iniciales y los precios finales rebajados, así como los descuentos que se han aplicado, expresados en %.

1 Analiza, en cada caso, el precio inicial y el precio final y comprueba que el descuento que se aplica es el correcto.

2 A los precios que figuran en el folleto no se les ha aplicado el IVA. ¿Cuáles son los precios finales después de aplicar el IVA (del 21 %)?

3 El modelo que más le gusta a Eva por sus prestaciones y diseño es el Lenovo A850i, cuyo precio actual es de 120,34 €. Si dicho precio aumenta un 36 % y el precio resultante se reduce otro 36 %, ¿el precio final será el mismo que el inicial?

4 Este lunes, Lenovo ha sacado al mercado un nuevo modelo con mayor memoria interna y mejor cámara. Su precio de lanzamiento ha sido de 280 €, sin embargo, el martes su precio se incrementará un 10 %, y el jueves, un 20% del precio resultante. ¿Significa esto que el precio final del móvil será un 30 % superior a su precio de lanzamiento?

5 MyPhone celebra todos los viernes el día sin IVA. ¿Vale la pena que Eva se espere al viernes para adquirir el nuevo Lenovo o debería comprarlo el mismo día de su lanzamiento?

24 | Problemas aritméticos
Aumentos y descuentos proporcionales

MATERIALES
Calculadora CASIO fx-82/85/350 SP X II Iberia

NIVEL EDUCATIVO
2º de ESO

ORIENTACIONES DIDÁCTICAS

- Es fundamental que los alumnos entiendan los problemas de aumentos y disminuciones pues es este un concepto que van a utilizar con mucha frecuencia a lo largo de su vida.
- Es importante que los alumnos entiendan la relación que existe entre números decimales, fracciones y porcentajes y que adquieran soltura en la realización de las trasformaciones correspondientes.

EJEMPLO DE SOLUCIÓN

1

Se calcula, en cada caso, el descuento aplicado.

NOTE 3	DOOGEE	HTM	G8000(ANDROID 4,4)
$\frac{231.04-146.12}{231.04}\times 100$ = 36.75554017	$\frac{292.25-90.20}{292.25}\times 100$ = 69.13601369	$\frac{64.46-51.57}{64.46}\times 100$ = 19.9968973	$\frac{146.12-98.85}{146.12}\times 100$ = 32.35012319

G8000(ANDROID 4,2)	LENOVO S898T	HIGTTOUCH	LENOVO A850i
$\frac{154.72-107.44}{154.72}\times 100$ = 30.55842813	$\frac{292.26-163.28}{292.26}\times 100$ = 44.13193732	$\frac{128.93-55.87}{128.93}\times 100$ = 56.66640813	$\frac{189.10-120.34}{189.10}\times 100$ = 36.36171338

2

Para calcular el precio final, conviene configurar la calculadora de manera que se muestren los resultados con solo dos cifras decimales.

ALPHA MENU 3	1	2
1:Entrada/Salida 2:Unidad angular 3:Formato número 4:Símb ingeniería	1:Fijar decimales 2:Not científica 3:Normal	1:Fijar decimales 2:Not científica 3:Normal Fijar:Selec 0~9

Los aumentos porcentuales equivalen a multiplicar por la cantidad (1 + *a*/100), mientras que las disminuciones porcentuales equivalen a multiplicar el precio inicial por (1 - *a*/100), siendo *a* el aumento, o el descuento, expresado en %.

NOTE 3	DOOGEE	HTM	G8000(ANDROID 4,4)
146.12×1.21 = 176.81	90.20×1.21 = 109.14	51.57×1.21 = 62.40	98.85×1.21 = 119.61

G8000(ANDROID 4,2)	LENOVO S898T	HIGTTOUCH	LENOVO A850i
107.44×1.21 = 130.00	163.28×1.21 = 197.57	55.87×1.21 = 67.60	120.34×1.21 = 145.61

24 | Problemas aritméticos
Aumentos y descuentos proporcionales

Este apartado también puede resolverse utilizando la función % de la calculadora, a la que se accede mediante SHIFT Ans, tal y como se indica a continuación:

NOTE 3
```
146.12×121%
                176.81
```
DOOGEE
```
90.20×121%
                109.14
```
HTM
```
51.57×121%
                 62.40
```
G8000(ANDROID 4,4)
```
98.85×121%
                119.61
```
G8000(ANDROID 4,2)
```
107.44×121%
                130.00
```
LENOVO S898T
```
163.28×121%
                197.57
```
HIGTTOUCH
```
55.87×121%
                 67.60
```
LENOVO A850i
```
120.34×121%
                145.61
```

3

El precio de lanzamiento del móvil Lenovo A850i es de 120,34 €. Si este precio aumenta un 36 %, alcanzará la cifra de:

```
120.34×136%
                163.66
```

Si a este precio se le realiza un descuento del 36 % se obtiene:

```
Ans×64%
                104.74
```

Se pueden realizar los cálculos utilizando porcentajes encadenados:

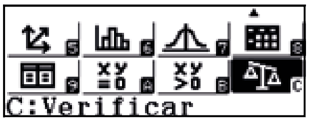
```
120.34×136%×64%
                104.74
```

Como se puede observar, el precio final es inferior al precio de lanzamiento.

4

Para resolver esta actividad, se puede usar el menú *Verificar*.

MENU 4



2 8 0 × 1 1 0 SHIFT Ans × 1 2 0 SHIFT Ans OPTN 1
2 8 0 × 1 3 0 SHIFT Ans

```
280×110%×120%=280×130%
```

Para introducir el signo = en la igualdad se accede a OPTN:

OPTN 1

```
1:=     2:≠
3:>     4:<
5:≥     6:≤
```

Al ejecutar la instrucción se obtiene que la igualdad es falsa:

```
280×110%×120%=280×130%
                 Falso
```

En consecuencia, el precio final no será un 30 % superior al precio de lanzamiento.

5

Si compra el móvil el lunes, deberá abonar el precio de lanzamiento del móvil más el IVA. Es decir:

```
280×121%
                338.8
```

Si se espere hasta el viernes, deberá abonar el resultado de incrementar el precio un 10 % seguido de un 20 %.

```
280×110%×120%
               369.60
```

En consecuencia, le conviene comprar el móvil el día de su lanzamiento.

Ampliación

1 Muchos supermercados llaman la atención de sus clientes ofreciéndoles diferentes ofertas en la compra de sus productos. De entre las siguientes campañas ¿cuál crees que supone una mayor rebaja sobre el precio inicial del producto?

"2 x 1 : llévate 2 y paga 1"

"3 x 2 : llévate 3 y paga 2"

"Segunda unidad a mitad de precio"

"Segunda unidad al 70% de descuento"

2 Los padres de Ester deciden comprar un coche. Ya han decidido el modelo, más no tienen claro en qué concesionario adquirir el coche. Un concesionario A le hace una oferta con un 15% de descuento sobre el precio sin IVA. Otro concesionario B les ha ofrecido un 15% de descuento al precio una vez aplicado el IVA. ¿Dónde deben adquirir el coche si quieren que les resulte la compra más beneficiosa?

3 Un determinado producto ha sufrido un incremento de precio del 20%. ¿Qué descuento debe aplicar el vendedor si decide vender al precio anterior?

25 | Problemas aritméticos
El plano planeta Tierra

Al pirata Nicasio se le ha quedado mal cuerpo tras su encuentro con Daniel Shenton, miembro de la *Flat Earth Society* (https://theflatearthsociety.org/home/), una asociación que defiende que la Tierra es un disco plano bordeado por un cinturón perimetral de hielo. Y en el fondo a Daniel no le faltan argumentos, ya que, a parte de los cosmológicos, posee un irrefutable argumento etimológico:

«¿Por qué habríamos de decir que la Tierra es un *planeta* si no fuera porque, tal y como su nombre indica, es *plana*?»

Nicasio, sin embargo, no confía en argumentos etimológicos, ya que al planeta se le llama Tierra cuando ¡el 80 % de su superficie está cubierta por agua! Además, recuerda haber observado en sus viajes por el Mar Caribe que los vigías son capaces de ver objetos en el horizonte desde su puesto en el palo mayor que no son visibles para los tripulantes situados en la cubierta.

Este hecho, junto con sus conocimientos matemáticos, le lleva a pensar que la Tierra es esférica, ya que si fuera plana, desde el palo mayor del barco se vería lo mismo que desde la cubierta. En efecto, si la tierra fuese plana, al observar el horizonte con un telescopio desde Finisterre, en dirección oeste, se vería el continente americano, cosa que, como sabemos, no sucede.

Por otra parte, Nicasio recuerda haber leído en algún libro que la mayoría de la comunidad científica considera que el radio de la Tierra es de 6 371 km y que ya un tal Eratóstenes llegó a calcular el radio de la esfera terrestre allá por el año 200 a.C.

Con todas estas informaciones, Nicasio cree haber hallado un método para demostrar que la Tierra es esférica. Consiste en considerar la hipótesis de que la Tierra es una esfera de radio R = 6 371 km y calcular la distancia a la que se encuentra el horizonte de un punto situado a una determinada altura. Si la distancia entre ese punto y el horizonte coincide con las observaciones que ha hecho Nicasio durante sus viajes, habrá conseguido demostrar que la Tierra es, ciertamente, una esfera de 6 371 km de radio.

1 Busca argumentos a favor de que la Tierra es esférica, o siendo más precisos, de que es un *geoide*, es decir, que tiene «forma de Tierra». (Como ves, los científicos son unos genios poniendo nombres a los cuerpos celestes).

2 ¿Puedes ayudarle a Nicasio a calcular la distancia al horizonte para diferentes alturas en el palo mayor?

El plano planeta Tierra

MATERIALES
Calculadora CASIO fx-82/85/350 SP X II Iberia

NIVEL EDUCATIVO
2º de ESO

ORIENTACIONES DIDÁCTICAS Y TÉCNICAS

- Conviene proponer a los alumnos que busquen argumentos a favor de la esfericidad del planeta y poner en duda sus tesis. Cabe preguntarles si tienen evidencias de la esfericidad del planeta, si han comprobado este hecho por sí mismos, si lo dan por cierto simplemente porque todo el mundo confía en él... Puede mencionarse un argumento que ya utilizaron los griegos en el pasado: «Si todos los cuerpos celestes que se han observados son esféricos, ¿por qué no habría de serlo la Tierra?». También puede comentarse que la sombra circular que tapa la Luna en los eclipses de Luna constituye una prueba de la esfericidad de la Tierra, entre muchos otros argumentos.
- Para realizar esta actividad, conviene hacer uso del menú *Tabla* de la calculadora, ya que permite obtener la distancia a la que se encuentra el horizonte para diferentes alturas.

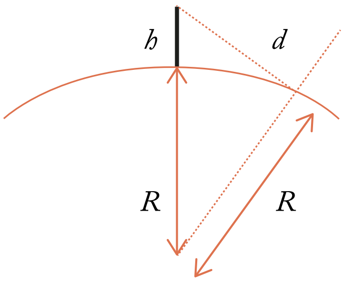
EJEMPLO DE SOLUCIÓN

1

Respuesta abierta.

2

Tal y como se observa en la figura, el horizonte corresponde al punto de tangencia de la visual con la superficie terrestre. En la figura se aprecia un triángulo rectángulo formado por los catetos R, que corresponde al radio terrestre, y d, que corresponde a la distancia entre el punto de observación y el horizonte. Se observa que ambos segmentos son perpendiculares, por lo que forman un ángulo recto. La hipotenusa del triángulo rectángulo corresponde al segmento $R + h$, es decir, al radio terrestre más la altura a la que se sitúa el punto de observación. Aplicando el Teorema de Pitágoras, se tiene que la distancia al horizonte, expresada en metros, es:

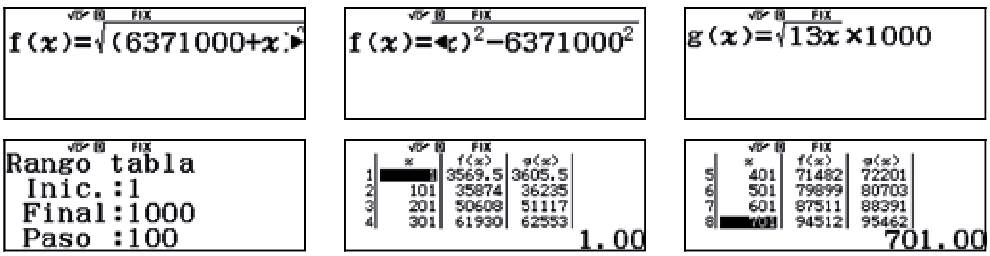


$$d = \sqrt{(R+h)^2 - R^2} = \sqrt{(6\,371\,000 + h)^2 - 6\,371\,000^2}$$

Existe una expresión más sencilla que permite calcular esta distancia de forma aproximada:

$$d \approx \sqrt{13h} \cdot 1\,000$$

Sustituyendo en estas expresiones diferentes valores de h se obtienen los correspondientes valores de d. Para ello, puede usarse la aplicación *Tabla* de la calculadora. En $f(x)$ se introduce la primera expresión, y en $g(x)$, la segunda:



Sobreescribiendo los valores de x se puede obtener la distancia al horizonte para cualquier altura.

Problema

Cofre del tesoro

El pirata Nicasio había acumulado una gran fortuna en monedas de oro y decidió distribuirla en 7 cofres, que enterraría en 7 islas.

En el primer cofre guardó 2/3 de su fortuna; en el segundo, 2/3 de lo que le quedaba; en el tercero, 2/3 de la fortuna restante, y así sucesivamente.

Cuando terminó de guardar las monedas en los 7 cofres, le quedaba una única moneda en sus manos.

¿De cuántas monedas de oro se componía el tesoro del Pirata Nicasio?

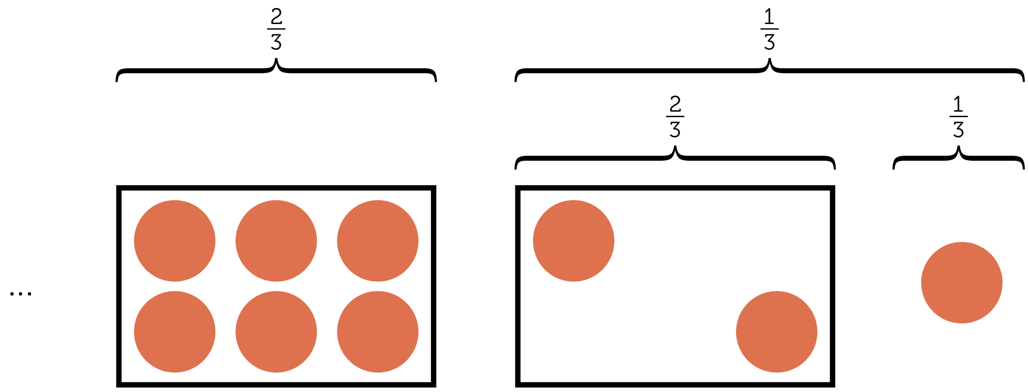
¿Cuántas monedas guardó en cada cofre?

¿Qué hubiera pasado si en lugar de distribuir su fortuna en 7 cofres lo hubiese hecho en 23?

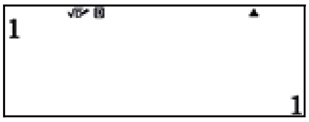
Una manera de abordar este problema consiste en resolverlo de atrás hacia adelante, empezando por la moneda en manos de Nicasio. Para hacerlo, conviene empezar por el caso más sencillo, en que hubiese un solo cofre.

En esas circunstancias, la moneda que tiene Nicasio en sus manos representa $\frac{1}{3}$ de su fortuna, ya que dentro del cofre hay $\frac{2}{3}$, es decir, el doble de lo que hay fuera $\left(\frac{2}{3}=2\cdot\frac{1}{3}\right)$. En consecuencia, dentro del cofre habría 2 x 1 = 2 monedas, de manera que la fortuna total de Nicasio ascendería a 3 monedas.

Siguiendo este razonamiento, si se añadiera un segundo cofre, el número de monedas contenidas en él sería el doble de las 3 monedas calculadas anteriormente, de manera que la fortuna total de Nicasio ascendería a 9 monedas.



Para calcular la fortuna total de Nicasio utilizando la calculadora, se introduce en primer lugar la moneda que tiene el pirata en sus manos (1).

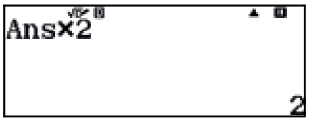


Seguidamente se multiplica esta cantidad por 2 (**Ans x 2**), con lo que se obtiene el número de monedas del primer cofre. Para obtener la fortuna total, se suman las monedas que hay en el cofre con el número de monedas que hay fuera de él, (**Ans + Preans**).

Para obtener los dos resultados a la vez hay que introducir en la calculadora la expresión:

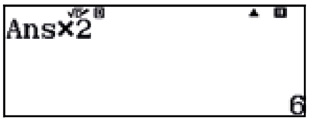
El signo de los dos puntos (:) que se ha introducido entre las dos expresiones permite obtener los valores correspondientes de manera sucesiva cada vez que se pulsa ⊟.

Primer cofre



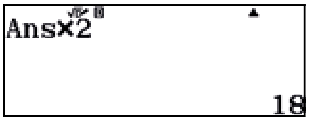
Fortuna acumulada

Segundo cofre



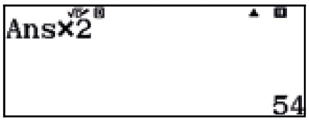
Fortuna acumulada

Tercer cofre



Fortuna acumulada

Cuarto cofre

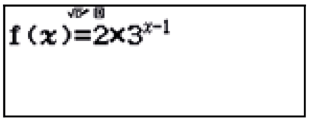


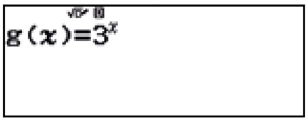
Fortuna acumulada

Se comprueba que el número de monedas en cada cofre es:

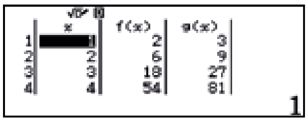
	Monedas	Fortuna acumulada
Cofre 1	2	3
Cofre 2	6	9
Cofre 3	18	27
Cofre 4	54	81
Cofre 5	162	243
Cofre 6	486	729
Cofre 7	1 458	2 187

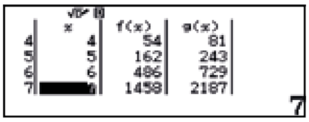
Del análisis de esta tabla se deduce que el número de monedas que hay en los cofres responde a una progresión geométrica de término general $a_n = 2 \cdot 3^{n-1}$, mientras que la fortuna acumulada responde a una progresión geométrica de término general $a_n = 3^n$. En consecuencia, otra manera de realizar el cálculo, en caso de que el método anterior se considere demasiado complicado, consiste en introducir las siguientes funciones en el menú tabla.





Con lo que se obtiene, para el caso de 7 cofres, el siguiente resultado:





26 | Proporcionalidad
Completando tablas de proporcionalidad

Miguel quiere completar su colección de cromos, por lo que se ha dirigido al colmado de su barrio y ha comprado 6 cromos por un precio total de 0,72 €.

Al ir a pagar, el dueño del colmado le ha comentado que un único reponedor tardaría 24 h en colocar todo el género que hay en las estanterías, por lo que ha tenido que contratar a varios reponedores.

1 Completa la siguiente tabla, en la que se muestra el número de cromos que se compran y su coste, expresado en euros.

Nº de cromos	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
Coste (euros)						0,72				

2 ¿Existe alguna relación entre estas dos magnitudes? ¿De qué tipo de relación se trata? Justifica tus respuestas.

3 Completa la siguiente tabla, en la que se muestra el tiempo que se tarda en colocar todo el género en las estanterías en función del número de reponedores.

Nº reponedores	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
Tiempo (horas)	24									

4 ¿Podrías escribir la expresión algebraica que relaciona una magnitud con la otra?

26 | Proporcionalidad
Completando tablas de proporcionalidad

MATERIALES
Calculadora CASIO fx-570/991 SP X II Iberia

NIVEL EDUCATIVO
3º de ESO

ORIENTACIONES DIDÁCTICAS Y TÉCNICAS
- El alumnado deberá conocer el concepto de proporcionalidad directa y proporcionalidad inversa antes de realizar esta actividad.
- La calculadora está configurada de fábrica para que muestre los resultados en forma de escritura natural. En esta actividad puede resultar inconveniente utilizar tal forma de escritura, pues los resultados se proporcionarán invariablemente en forma fraccionaria. Es posible obtener, a partir de la expresión fraccionaria, la forma decimal, y viceversa, presionando la tecla [S⇔D]. Sin embargo, resulta más cómodo modificar la configuración de la calculadora en el modo ***2: E Mat/S Decimal***, tal como se indica a continuación:

[ALPHA] [MENU] [1]

```
1:Entrada/Salida
2:Unidad angular
3:Formato número
4:Símb ingeniería
```

[2]

```
1:E Mat/S Mat
2:E Mat/S Decimal
3:E Línea/S Línea
4:E Línea/S Decim
```

EJEMPLO DE SOLUCIÓN

1

Un primer método de resolver este apartado consiste en calcular el coste unitario, es decir, el coste de un único cromo.

```
0.72
 6
                 0.12
```

A continuación, se va multiplicando el número de cromos por el precio unitario. Puede realizarse mentalmente la operación y comprobarse después los resultados con la calculadora:

Nº de cromos	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
Coste (euros)	0,12	0,24	0,36	0,48	0,60	0,72	0,84	0,96	1,08	1,20

También se puede completar la tabla utilizando la tecla *ANS*. Para ello, se introduce, primero, el coste unitario de los cromos:

[0] [·] [1] [2] [=]

```
0.12
                 0.12
```

Seguidamente, se suma a este resultado nuevamente el valor unitario, para obtener el valor de 2 cromos:

[+] [0] [·] [1] [2] [=]

```
Ans+0.12
                 0.24
```

Al presionar la tecla [=] se obtiene el precio de 3 cromos, 4 cromos, 5 cromos… y así sucesivamente.

[=]

```
Ans+0.12
                 0.36
```

[=]

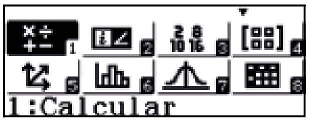
```
Ans+0.12
                 0.48
```

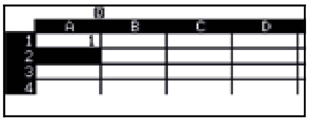
26 | Proporcionalidad
Completando tablas de proporcionalidad

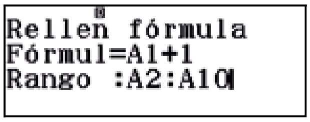
La actividad también puede resolverse utilizando el menú *Hoja de cálculo*.

En la primera columna se introduce el número de cromos. Para hacerlo, se introduce en la primera celda el valor 1 y, seguidamente, se introduce en cada celda el valor de la celda anterior más una unidad; es decir, se aplica la fórmula **A1+1**.

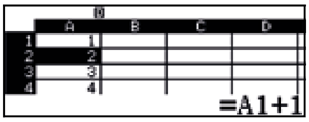
MENU 1 | 1 = | OPTN 1 | ALPHA (−) 1 + 1 =

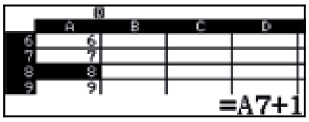




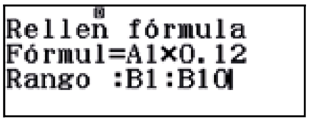
▼ | ▼

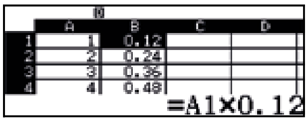




En la segunda columna se introducen los precios. Para hacerlo, en cada celda se introduce el resultado de multiplicar por 0,12 la celda contigua.

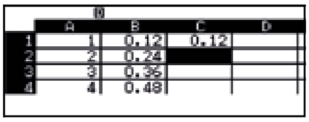
OPTN 1 | ALPHA (−) 1 × 0 · 1 2 =

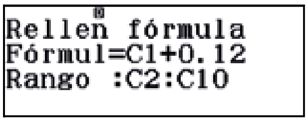




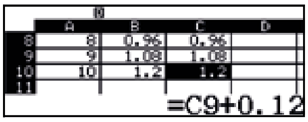
Otra manera de completar la columna de los precios sería introducir 0,12 en la primera celda y sumar, sucesivamente, 0,12 al resto de celdas.

0 · 1 2 = | OPTN 1 | ALPHA x² 1 + 0 · 1 2 =



Se observa que con esta estrategia se obtienen los mismos resultados que en el caso anterior.



2

Respuesta abierta.

3

Si un reponedor tarda 24 horas en colocar todo el género en las estanterías, dos reponedores tardarían las mitad de tiempo; es decir, 24 : 2 = 12 horas. Tres trabajadores tardarían una tercera parte, es decir, 24 : 3 = 8 horas.

De este razonamiento se deduce que el tiempo que tardan los reponedores en colocar todo el género resulta de dividir el tiempo que tardaría en colocarlo un solo reponedor (24 h) por el número total de reponedores:

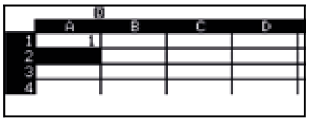
Nº reponedores	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
Tiempo (horas)	24	12	8	6	4,8	4	3,42	3	2,66	2,4

Completando tablas de proporcionalidad

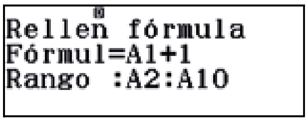
4

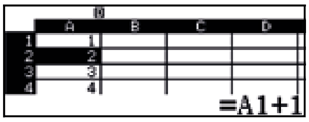
Para rellenar la hoja de cálculo hay que considerar que la primera columna, que corresponde al número de reponedores, puede rellenarse a partir de los sucesivos números naturales.

En la primera celda de la primera columna se introduce 1.



En las siguientes celdas se introduce la fórmula **A1 + 1**, tal y como se indica a continuación:

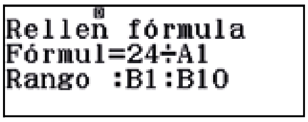


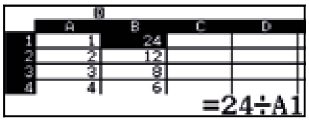


La segunda columna se rellena dividiendo 24 por el número de reponedores:

OPTN 1

2 4 ÷ ALPHA (−) 1





27 | Proporcionalidad
Interés simple e interés compuesto

El interés simple, I, es el beneficio que origina una cantidad de dinero llamada capital, C, en un periodo de tiempo, t, a un rédito determinado, r. Se entiende por rédito el tanto por ciento anual, mensual o diario que paga un banco por tener depositado un dinero determinado.

Interés anual	Interés mensual	Interés diario
$I = \frac{C \cdot r \cdot t}{100}$	$I = \frac{C \cdot r \cdot t}{1\,200}$	$I = \frac{C \cdot r \cdot t}{36\,000}$

Cuando el interés que se obtiene al final de cada periodo de inversión no se retira sino que se reinvierte, añadiéndose al capital, se habla de interés compuesto. Si un banco ofrece un rédito del r % anual a interés compuesto, en un año, un capital C se transforma en:

$$C\left(1 + \frac{r}{100}\right)$$

Al cabo de n años, dicho capital C se transforma en:

$$C\left(1 + \frac{r}{100}\right)^n$$

1 Realiza una investigación sobre qué es el IPC y qué significa en términos económicos.

2 ¿Cómo afecta a tu recibo de la luz un aumento de IPC del 10 %?

3 Si el sueldo de una persona que cobra 1 020 € mensuales aumenta según el IPC, ¿cuánto cobrará en el próximo año?

4 Calcula el interés que se obtiene al depositar 20 000 € durante 4 años en una entidad bancaria que ofrece un rédito anual de 2,75 % a interés simple.

5 Halla en cuánto se transforma un capital de 20 000 € depositado en una entidad bancaria que ofrece un rédito anual del 8 % durante 4 años a interés compuesto.

27 | Proporcionalidad
Interés simple e interés compuesto

MATERIALES
Calculadora CASIO fx-570/991 SP X II Iberia

NIVEL EDUCATIVO
3º de ESO

ORIENTACIONES DIDÁCTICAS
- Siempre que llega principios de año, los medios de comunicación presentan informaciones sobre cuánto ha subido el coste de la vida, lo que en términos económicos se conoce como IPC. El cálculo del IPC es una de las principales aplicaciones de los aumentos y disminuciones porcentuales, junto con el cálculo de hipotecas, TAE, amortizaciones de capital, etc. Es por ello necesario que los alumnos se familiaricen con estos conceptos y que vean sus aplicaciones prácticas, ya que deberán utilizarlos con frecuencia en su vida cotidiana.
- Se puede pedir a los alumnos que traigan sus propias facturas de la luz para trabajar con ellas y analizar los diferentes conceptos que aparecen, entre ellos el IVA (otro ejemplo de aumento porcentual).

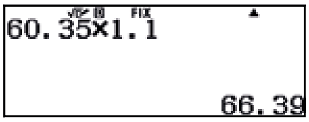
EJEMPLO DE SOLUCIÓN

1

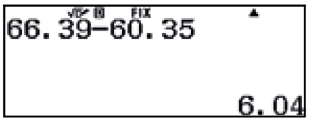
Respuesta abierta.

2

Supongamos una factura de la luz de 60,35 €. En ese caso, el aumento del IPC supone un aumento en la factura, de manera que el precio de esta pasa a ser:



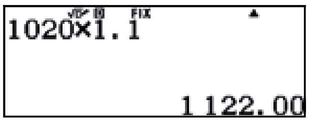
El aumento en el recibo de la luz ha sido, por tanto:



Es decir, se ha producido un aumento de 6,04 €.

3

El sueldo asciende a:



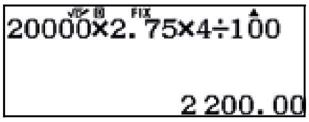
Luego, el incremento en el salario ha sido:

Es decir, de 102 €.

27 | Proporcionalidad
Interés simple e interés compuesto

4

El interés que se obtiene al depositar 20 000 € durante 4 años al 2,75 % de interés simple resulta:



Es decir, se obtiene un capital final de 2 200 €.

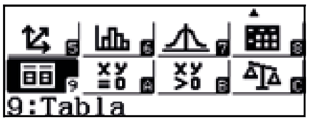
5

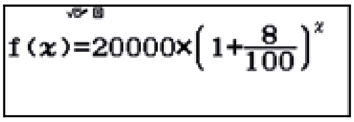
Para responder a esta cuestión entramos en el menú tabla e introducimos la función que proporciona el interés compuesto, es decir:

$$f(x) = 20\,000 \cdot \left(1 + \frac{8}{100}\right)^x$$

MENU 9

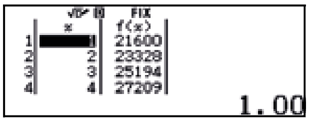
2 0 0 0 0 (1 + ⊟ 8 ▼ 1 0 0 ▶) x■ x





Al pulsar ⊟, aparece una pantalla que permite introducir el valor inicial, que en nuestro caso es 1 (primer año), el valor final, que es 4 (4º año), y finalmente el paso, que en nuestro caso es 1 (ya queremos ver como varía nuestro capital año a año).

Aparecerá en pantalla una tabla en la que se muestra cómo varía este capital en los cuatro años.



Problema
Empresa *offshore*

Un empresario creó una empresa *offshore* en las Islas Vírgenes para no pagar impuestos en su país y ganar, así, más dinero. Invirtió 3 millones de euros y el banco de las Islas Vírgenes le ofreció un interés compuesto del 5 % anual durante 10 años. El empresario se acogió a una amnistía fiscal del Ministerio de Hacienda según la cual había de pagar el 10 % del dinero no declarado en concepto de multa.

a) ¿A cuánto ascendió su capital al cabo de 10 años?

b) ¿Cuántas veces aumento su capital?

c) Si declaró todo el dinero que había ocultado al fisco, ¿cuánto pagó de multa?

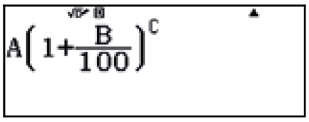
a) La fórmula del capital para un interés compuesto es:

$$C_F = C_0\left(1 + \frac{i}{100}\right)^t$$

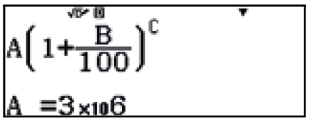
Donde C_0 es el capital inicial, i es el interés y t es el tiempo transcurrido expresado en años.

Se designa con *A* la variable capital inicial, con *B* la variable interés y con *C* la variable tiempo, y se usa la función *CALC*.

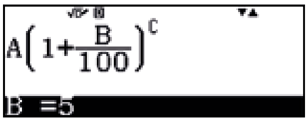
ALPHA (−) (1 + ▭ ALPHA °'" ▼ 1 0 0 ▶) x■ ALPHA x⁻¹



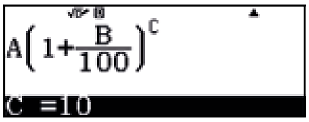
CALC 3 x10ˣ 6 =



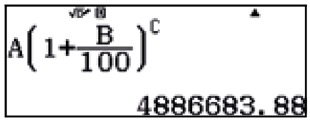
5 =



1 0 =



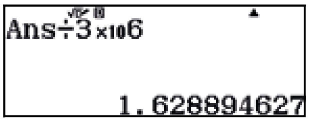
=



Al cabo de 10 años el banco le reembolsará 4 886 683,88 €.

b) El número de veces que aumentó su capital es $\frac{C_F}{C_0}$:

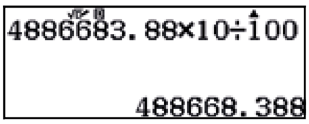
Ans ÷ 3 x10ˣ 6 =



Al cabo de 10 años el dinero se multiplicará por más de 1,6.

c) La multa es $C_F\,\frac{10}{100}$:

4 8 8 6 6 8 3 · 8 8 × 1 0 ÷ 1 0 0 =



Con la amnistía fiscal, el empresario pagará la irrisoria cifra de 488 668,39 €.

$\hat{B} = 73^\circ\ 53'\ 52{,}39''$

$\dfrac{(x+1)x}{2}$

C b a A c B

$\hat{B}$

SHIFT

$S_n = \dfrac{(n+1)n}{2}$

9

3

2

5

$\hat{C} = 180^\circ - (\hat{A} + \hat{B})$

MENU

$\hat{B} = \arccos\left(\dfrac{b^2 - a^2 - c^2}{-2ac}\right)$

01 | Resolución de triángulos. Valor de una expresión.
Teorema del coseno

Los problemas que se plantean en topografía y navegación exigen la resolución de triángulos, es decir, la obtención de sus elementos (lados y ángulos) desconocidos a partir de los conocidos.

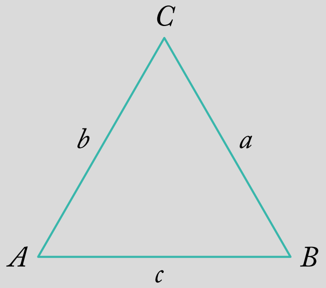
La resolución de un triángulo puede obtenerse mediante su construcción geométrica (con regla y compás) o utilizando expresiones trigonométricas (como los teoremas del seno y el coseno). Estos problemas pueden tener solución única, dos soluciones o bien pueden ser de imposible solución.

A continuación se utilizará el **teorema del coseno** para resolver un triángulo.

Dicho teorema es una generalización del teorema de Pitágoras. En francés lleva el nombre del matemático y astrónomo persa al-Kashi. Dicho teorema dice así:

Dado un triángulo $\overset{\triangle}{ABC}$ de lados conocidos $\overline{BC} = a$, $\overline{AC} = b$ y $\overline{AB} = c$, se tiene:

- $a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cos \hat{A} \Rightarrow \hat{A} = \arccos\left(\frac{a^2 - b^2 - c^2}{-2bc}\right)$
- $b^2 = a^2 + c^2 - 2ac \cos \hat{B} \Rightarrow \hat{B} = \arccos\left(\frac{b^2 - a^2 - c^2}{-2ac}\right)$
- $c^2 = a^2 + b^2 - 2ab \cos \hat{C} \Rightarrow \hat{C} = \arccos\left(\frac{c^2 - a^2 - b^2}{-2ab}\right)$



1 Resuelve el triángulo $\overset{\triangle}{ABC}$, de lados $a = 15$, $b = 34$ y $c = 35$.

2 Resuelve el triángulo $\overset{\triangle}{ABC}$, conocidos $b = 4$, $c = 3$ y $\hat{A} = 60°$.

3 Resuelve el triángulo $\overset{\triangle}{ABC}$, conocidos $a = 3$, $c = 4$ y $\hat{A} = 30°$.

Teorema del coseno

MATERIALES

Calculadora CASIO fx-570/991 SP X II Iberia

NIVEL EDUCATIVO

4º de ESO

ORIENTACIONES DIDÁCTICAS Y TÉCNICAS

- El alumnado deberá saber cómo calcular el valor numérico de una expresión algebraica previamente a la realización de esta actividad.
- El alumno tiene que conocer las razones trigonométricas.
- Para realizar la actividad se utilizará la función *CALC* y el modo *Ecuación/Función*, que permite la resolución de ecuaciones de segundo grado.
- Se utilizarán razones trigonométricas para calcular ángulos (modo angular sexagesimal).

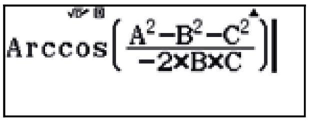
EJEMPLO DE SOLUCIÓN

1

De este triángulo se conocen los tres lados y se desconocen los ángulos. Para determinar el ángulo A, se introduce en la calculadora la expresión:

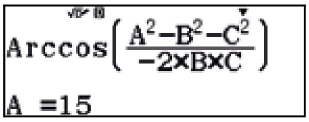
$$\hat{A} = \text{arccos}\left(\frac{a^2 - b^2 - c^2}{-2bc}\right)$$

[SHIFT] [cos] [▭/▭] [ALPHA] [(−)] [x^2] [−] [ALPHA] [°'"] [x^2] [−] [ALPHA] [x^{-1}] [x^2] [▼] [−] [2] [×] [ALPHA] [°'"] [×] [ALPHA] [x^{-1}] [▶] [)]

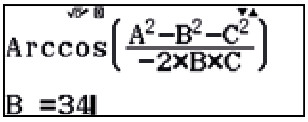


Seguidamente, se presiona [CALC] y se substituye en la fórmula los valores $A \longrightarrow a = 15$, $B \longrightarrow b = 34$, $C \longrightarrow c = 35$.

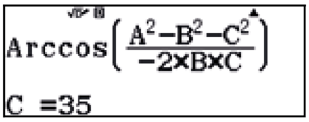
[CALC] [1] [5] [=]



[3] [4] [=]

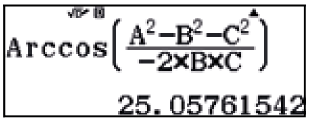


[3] [5] [=]

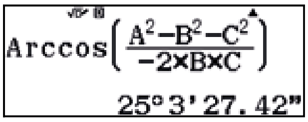


Al presionar [=] se obtiene el valor del ángulo $\hat{A}$:

[=]



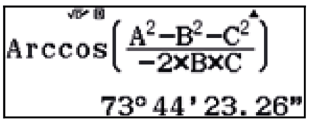
[°'"]



En consecuencia, el ángulo resulta $\hat{A}$ = 25° 3′ 27,42′′.

Para determinar el valor del ángulo $\hat{B}$, se procede como en el caso anterior, sustituyendo los valores $A \longrightarrow b = 34$, $B \longrightarrow a = 15$, $C \longrightarrow c = 35$.

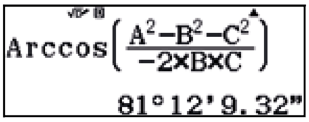
[CALC] [3] [4] [=] [1] [5] [=] [3] [5] [=] [=] [°'"]



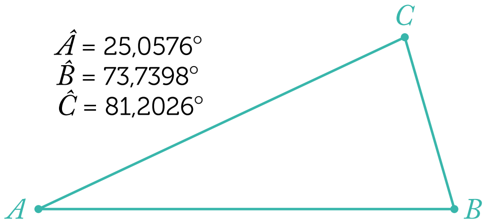
Es decir, $\hat{B}$ = 73° 44′ 23,26′′.

El ángulo $\hat{C}$ se calcula como en los casos anteriores. Ahora se sustituyen los valores $A \longrightarrow c = 35$, $B \longrightarrow a = 15$, $C \longrightarrow b = 34$.

CALC 3 5 = 1 5 = 3 4 = = °'"



$\hat{A} = 25{,}0576°$
$\hat{B} = 73{,}7398°$
$\hat{C} = 81{,}2026°$

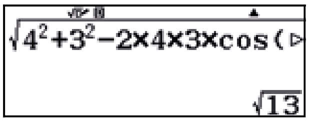


En consecuencia, $\hat{C} = 81°\ 12'\ 9{,}32''$.

El triángulo resulta con las dimensiones que se muestran en la figura adjunta.

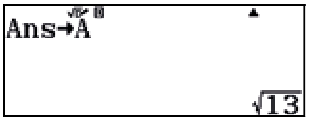
2

Para calcular el lado a se utiliza la fórmula del coseno: $a = \sqrt{b^2 + c^2 - 2bc\cos\hat{A}}$

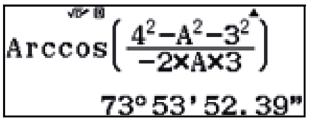


Por tanto, $a = \sqrt{13}$. Se almacena este valor en la variable A.

STO (–)

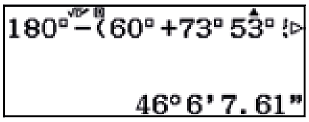


Para calcular el ángulo $\hat{B}$ se utiliza el teorema del coseno: $\hat{B} = \text{arccos}\left(\frac{b^2 - a^2 - c^2}{-2ac}\right)$



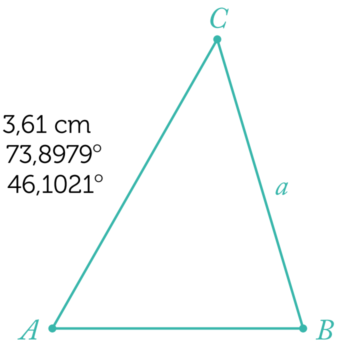
En consecuencia, $\hat{B} = 73°\ 53'\ 52{,}39''$.

Por tanto, $\hat{C} = 180° - (\hat{A} + \hat{B})$.



Es decir, $\hat{C} = 46°\ 6'\ 7{,}61''$.

$a = 3{,}61$ cm
$\hat{B} = 73{,}8979°$
$\hat{C} = 46{,}1021°$



3

Si se resuelve gráficamente el problema se observa que existen dos soluciones.

Se utiliza la fórmula del coseno $a^2 = b^2 + c^2 - 2bc\cos\hat{A}$ para calcular el lado b.

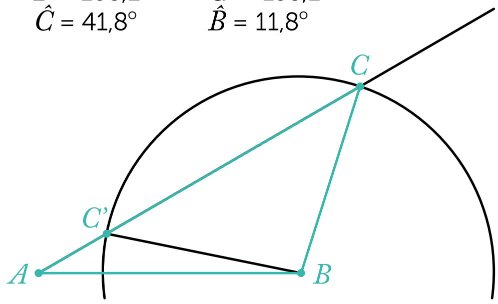
$$3^2 = b^2 + 4^2 - 2b \cdot 4 \cdot \cos 30°$$

Se observa que se trata de una ecuación de segundo grado.

Para resolver la ecuación utilizando la calculadora, se pasan todos los términos, ordenados según el grado, a uno de los miembros de la ecuación. Es decir, se iguala esta a cero:

$b^2 + 4^2 - 8 \cdot \cos 30° \cdot b - 9 = 0 \Rightarrow b^2 - 8 \cdot \cos 30° \cdot b + 7 = 0$

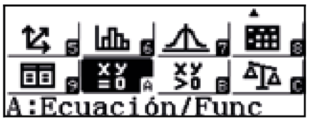
$b = 5{,}70$ cm $b = 1{,}23$ cm
$\hat{B} = 108{,}2°$ $\hat{C}' = 138{,}2°$
$\hat{C} = 41{,}8°$ $\hat{B} = 11{,}8°$



Teorema del coseno

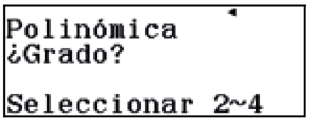
Una vez se tiene dispuesta la expresión algebraica de esta manera, puede utilizarse el modo *Ecuación/Función* para calcular el lado b, resolviendo la ecuación de segundo grado.

[MENU] [(−)]

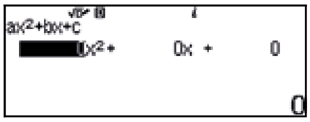


[2]

[2]

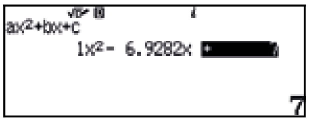


[=]

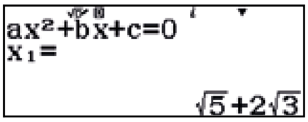


Se introducen los coeficientes correspondientes y se presiona [=], con lo que se obtienen las dos soluciones de la ecuación:

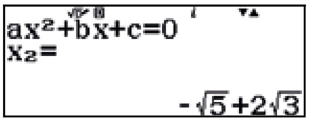
[=]



[=]



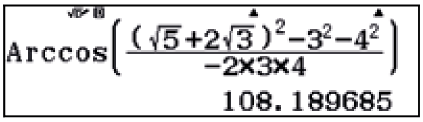
[=]



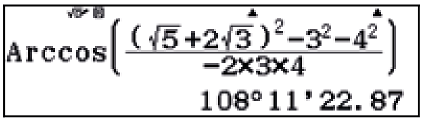
Se analizan ahora separadamente los triángulos que resultan de considerar cada una de las soluciones de la ecuación:

a) $b = \sqrt{5} + 2\sqrt{3} \approx 5{,}70$

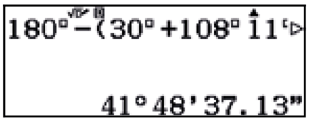
Se considera la primera solución y se aplica el teorema del coseno para calcular el ángulo B:



[°'"]

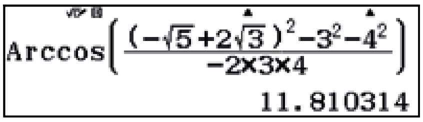


El ángulo $\hat{C}$ se calcula como $\hat{C} = 180° - (\hat{A} + \hat{B})$. Por tanto:

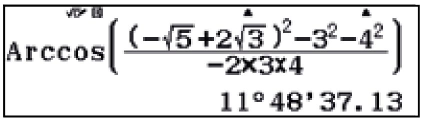


b) $b = -\sqrt{5} + 2\sqrt{3} \approx 1{,}23$

Se considera la segunda solución y se aplica el teorema del coseno, con lo que se obtiene:

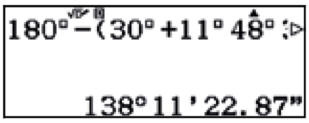


[°'"]



Es decir, $\hat{B} = 11°\ 48'\ 37{,}13''$.

En cuanto al ángulo $\hat{C}$, se obtiene a partir de $\hat{C} = 180° - (\hat{A} + \hat{B})$. Por tanto:



$\hat{C} = 138°\ 11'\ 22{,}87''$.

02 | Regularidades numéricas
Sumas finitas

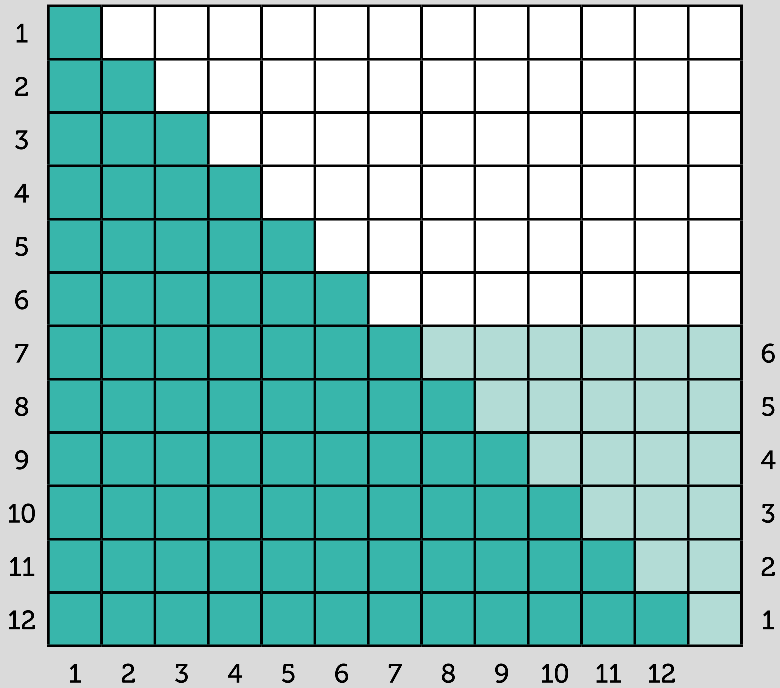
Siendo aún un niño, el matemático alemán **Johann Carl Friedrich Gauss** (1777 - 1855) pudo resolver en pocos segundos el reto que le planteó su profesor de Matemáticas:

«¿Cuál es el valor de la suma de los 100 primeros números naturales?»

Gauss observó que el primer número natural, 1, y el último de la lista, 100, suman lo mismo que el segundo número, 2, y el penúltimo, 99, y así sucesivamente, por lo que concluyó que la suma de los 100 primeros números es:

$$(1 + 100) \cdot \frac{100}{2} = 5\,050$$

La siguiente figura muestra gráficamente este resultado para los 12 primeros números naturales.



1 En la figura superior se observa que la suma de los primeros 12 números naturales es $\frac{13 \times 12}{2} = 78$.

a) Calcula 1 + 2 + 3 + 4 + 5 + 6 + 7 + 8 + 9 + 10 + 11 + 12 + 13.

b) Calcula la suma de los 500 primeros números naturales.

c) Utiliza la función sumas finitas de la calculadora para calcular las sumas de los apartados anteriores.

d) Generaliza los resultados obtenidos.

2 Realiza las siguientes sumas:

a) Suma de los primeros 500 números pares.

b) Suma de los primeros 100 múltiplos de 3.

c) Suma de los primeros 100 cuadrados perfectos.

d) Suma de los primeros 50 cubos perfectos.

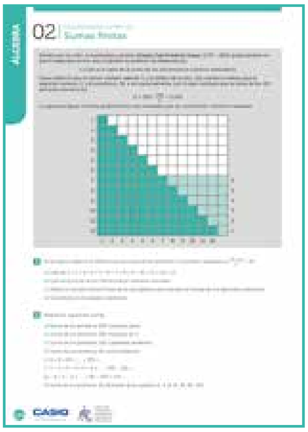
e) 8 + 9 + 10 + ... + 100 =.

f) 1 – 2 + 3 – 4 + 5 – 6 + ... + 99 – 100 =.

g) – 4 + 5 – 6 + ... + 99 – 100 + 101 =.

h) Suma de los primeros 20 términos de la sucesión 2, 4, 8, 16, 32, 64, 128...

Sumas finitas



MATERIALES
Calculadora CASIO fx-570/991 SP X II Iberia

NIVEL EDUCATIVO
4º de ESO

ORIENTACIONES DIDÁCTICAS Y TÉCNICAS

- Esta actividad plantea la búsqueda de patrones en problemas aritméticos y la generalización de los resultados obtenidos.
- Para desarrollar la actividad se hará uso de la función *Sumas finitas*, que permite resolver sumas finitas de progresiones aritméticas y geométricas. Se accede a dicha función mediante SHIFT x.

EJEMPLO DE SOLUCIÓN

1

a) La suma de los 13 primeros números naturales es igual a la mitad del área del rectángulo de dimensiones 14 x 13.

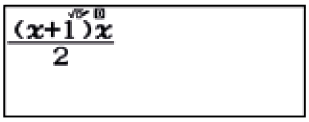
$$1 + 2 + 3 + 4 + 5 + 6 + 7 + 8 + 9 + 10 + 11 + 12 + 13 = \frac{14 \times 13}{2} = 91.$$

b) La suma de los n primeros números naturales es igual a la mitad del área del rectángulo de dimensiones $(n + 1)\ n$. Es decir:

$$S_n = \frac{(n+1)n}{2}$$

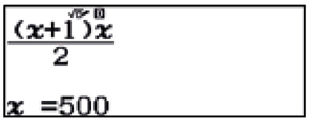
Para calcular la suma de los primeros 500 números naturales se introduce la expresión $\frac{(x+1)x}{2}$:

▭ (x + 1) x ▼ 2

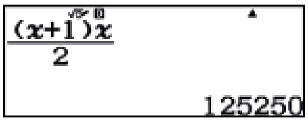


Seguidamente se hace uso de la función CALC, como se muestra a continuación:

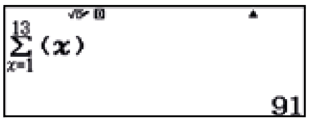
CALC 5 0 0 =

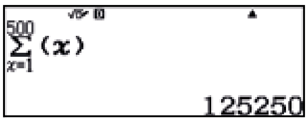


=



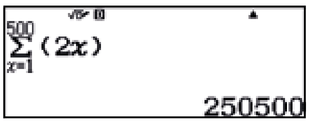
c) Los apartados anteriores se pueden resolver haciendo uso de la función suma finita:



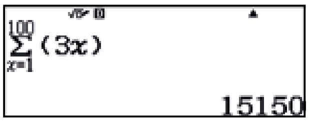


2

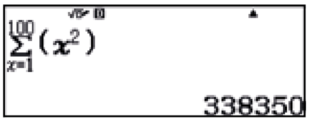
a) Para calcular la suma de los primeros 500 números pares se efectúa $\sum_{x=1}^{500} 2x$:



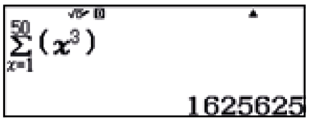
b) Para calcular la suma de los primeros 100 múltiplos de 3 se efectúa $\sum_{x=1}^{100} 3x$:



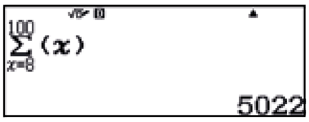
c) Para calcular la suma de los primeros 100 cuadrados perfectos se efectúa $\sum_{x=1}^{100} x^2$:



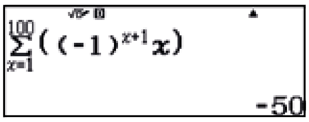
d) Para calcular la suma de los primeros 50 cubos perfectos se efectúa $\sum_{x=1}^{50} x^3$:



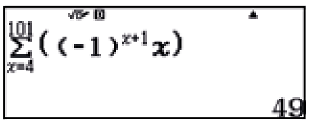
e) Para calcular 8 + 9 + 10 + ... + 100 = se efectúa $\sum_{x=8}^{100} x$:



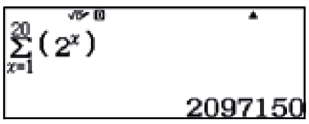
f) Para calcular 1 – 2 + 3 – 4 + 5 – 6 + ... + 99 – 100 = se efectúa $\sum_{x=1}^{100} (-1)^{x+1} x$:



g) Para calcular – 4 + 5 – 6 + ... + 99 – 100 + 101 = se efectúa $\sum_{x=4}^{101} (-1)^{x+1} x$:



h) Para calcular la suma de los 20 primeros términos de la sucesión 2 + 4 + 8 + 16 + 32 + 64 + 128 + ... se efectúa $\sum_{x=1}^{20} 2^x$:



Problema

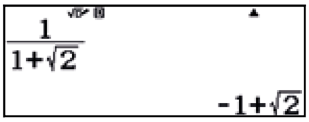
Suma finita

Determinar el número natural n tal que:

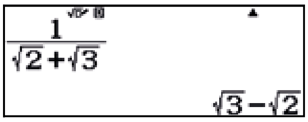
$$\frac{1}{1+\sqrt{2}}+\frac{1}{\sqrt{2}+\sqrt{3}}+.....+\frac{1}{\sqrt{n}+\sqrt{n+1}}=10$$

En primer lugar, se racionalizan los primeros sumandos (la calculadora lo hace de forma automática):

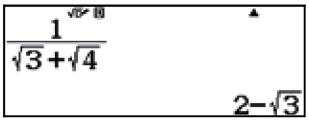
Sumando 1



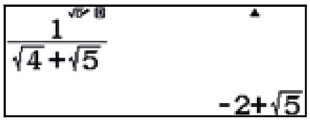
Sumando 2



Sumando 3



Sumando 4



Se pueden ahora anotar las sumas de los primeros n sumandos:

S_1	S_2	S_3	S_4
$-1+\sqrt{2}$	$-1+\sqrt{3}$	1	$-1+\sqrt{5}$

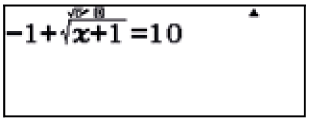
Se observa que $S_n=-1+\sqrt{n+1}$. Para determinar el número natural para el que la suma alcanza el valor 10, hay que resolver la siguiente ecuación:

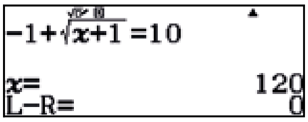
$$10=-1+\sqrt{n+1}$$

Esta ecuación puede resolverse con la función SOLVE, a la que se accede mediante la combinación de teclas SHIFT CALC.

(−) 1 + √■ x +
1 ▶ ALPHA CALC 1 0

SHIFT CALC =





Luego, el número natural pedido es el 120.

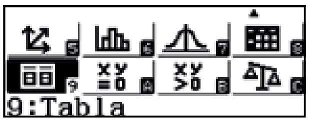
Otra manera de resolver el problema consiste en utilizar el menú *Tabla*, para determinar la antiimagen de 10 según la función:

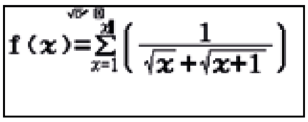
$$f(x)=\sum_{1}^{x}\frac{1}{\sqrt{x}+\sqrt{x+1}}$$

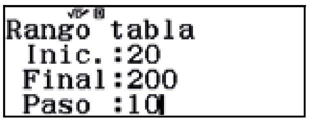
Para ello se procede de la siguiente manera:

MENU 9

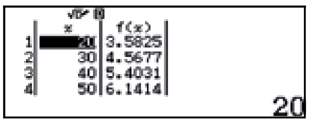
SHIFT x ▭ 1 ▼ √■ x
▶ + √■ x + 1 ▶
▶ ▶ 1 ▶ x =

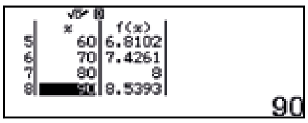


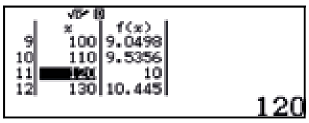




Seguidamente se busca la antiimagen de 10:







Como se observa, el número buscado es el 120.

03 | Regularidades numéricas
Recurrencia en una tabla de multiplicar

La tabla de multiplicar presenta interesantes relaciones entre los números que contiene. Si te fijas, por ejemplo, en la diagonal principal de la tabla, observarás que está formada por la sucesión de cuadrados perfectos:

$$1, 4, 9, 16, 25, \ldots$$

La generalización matemática de dicha sucesión es $a_n = n^2$, con $n = 1, 2, 3, \ldots$

Observa la siguiente tabla de multiplicar, en la que los números aparecen dispuestos formando una escuadra de carpintero:

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15
2	4	6	8	10	12	14	16	18	20	22	24	26	28	30
3	6	9	12	15	18	21	24	27	30	33	36	39	42	45
4	8	12	16	20	24	28	32	36	40	44	48	52	56	60
5	10	15	20	25	30	35	40	45	50	55	60	65	70	75
6	12	18	24	30	36	42	48	54	60	66	72	78	84	90
7	14	21	28	35	42	49	56	63	70	77	84	91	98	105
8	16	24	32	40	48	56	64	72	80	88	96	104	112	120
9	18	27	36	45	54	63	72	81	90	99	108	117	126	135
10	20	30	40	50	60	70	80	90	100	110	120	130	140	150
11	22	33	44	55	66	77	88	99	110	121	132	143	154	165
12	24	36	48	60	72	84	96	108	120	132	144	156	168	180
13	26	39	52	65	78	91	104	117	130	143	156	169	182	195
14	28	42	56	70	84	98	112	126	140	154	168	182	196	210
15	30	45	60	75	90	105	120	135	150	165	180	195	210	225

1 Halla la suma de los números contenidos en cada escuadra:

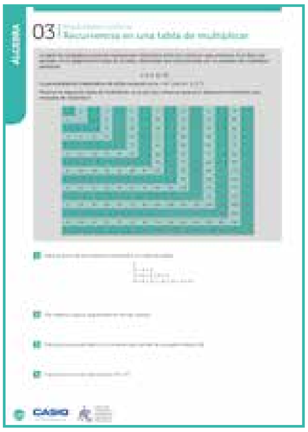
1
2 + 4 + 2
3 + 6 + 9 + 6 + 3
4 + 8 + 12 + 16 + 12 + 8 + 4
...

2 ¿Se observa alguna regularidad en dichas sumas?

3 Calcula la suma de todos los números que forman la escuadra número 16.

4 Calcula la suma de toda la tabla 15 x 15.

Recurrencia en una tabla de multiplicar



MATERIALES

Calculadora CASIO fx-570/991 SP X II Iberia

NIVEL EDUCATIVO

4º de ESO

ORIENTACIONES DIDÁCTICAS Y TÉCNICAS

- Esta actividad plantea la búsqueda de patrones en problemas aritméticos y la generalización de los resultados obtenidos.
- Para desarrollar la actividad se hará uso de la función *Sumas finitas*, que permite resolver sumas finitas de progresiones aritméticas y geométricas. Se accede a dicha función mediante SHIFT x.

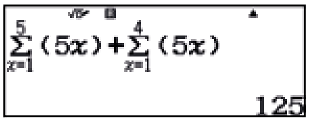
EJEMPLO DE SOLUCIÓN

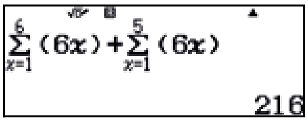
1

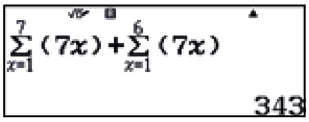
El resultado de la suma de los números contenidos en las primeras escuadras puede calcularse directamente:

$$1;\ 2 + 4 + 2 = 8;\ 3 + 6 + 9 + 6 + 3 = 27;\ 4 + 8 + 12 + 16 + 12 + 8 + 4 = 64$$

Para calcular las siguientes sumas se recurre a la función *Sumas finitas*:







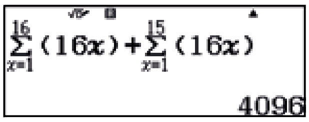
2

Como se observa, la suma de los números contenidos en las escuadras coincide con la sucesión de los cubos perfectos:

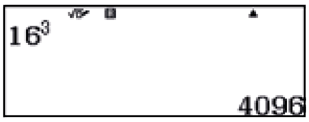
$$1^3 = 1,\ 2^3 = 8,\ 3^3 = 27,\ 4^3 = 64,\ 5^3 = 125,\ 6^3 = 216 \ldots n^3$$

3

La suma de los números contenidos en la escuadra 16 es:



Se comprueba que dicha suma es 16^3.



Se puede demostrar de forma analítica que el resultado de la n-ésima suma es n^3:

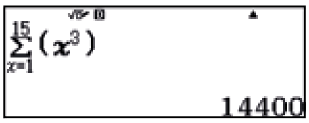
$$n \cdot 1 + n \cdot 2 + \ldots\ldots + n \cdot (n-1) + n \cdot n + n \cdot (n-1) + n \cdot (n-2) + \ldots\ldots + n \cdot 2 + n \cdot 1 =$$

$$= n \cdot (1 + 2 + \ldots\ldots + n) + n \cdot (1 + 2 + \ldots\ldots + n - 1) = n \cdot \frac{1+n}{2} \cdot n + n \cdot \frac{1+n-1}{2} \cdot (n-1) =$$

$$= n^2 \cdot \left(\frac{1+n}{2} + \frac{n-1}{2}\right) = n^2 \cdot n = n^3$$

4

La suma de todos los números de la tabla 15 x 15 es $\sum_{n=1}^{15} n^3$:



En consecuencia, la suma de todos los números de la tabla 15 x 15 es 14 400.

04 | Regularidades numéricas
Torre de números impares

El triángulo de Pascal o de Tartaglia es una disposición de números en forma triangular en la que cada número de la fila inferior es la suma de los dos números superiores contiguos.

Algunas propiedades numéricas del triángulo de Pascal son las siguientes:

- La segunda diagonal está formada por los números naturales.

  1, 2, 3, 4, 5, ...

- La tercera diagonal está formada por los números triangulares.

  1, 3, 6, 10, ...

- La suma de las filas corresponden a las potencias de 2:

  2, 4, 8, 16, 32, ...

1	1				
1	2	1			
1	3	3	1		
1	4	6	4	1	
1	5	10	10	5	1

Observa la siguiente pirámide de números:

1					
3	5				
7	9	11			
13	15	17	19		
21	23	25	27	29	

1 ¿Los elementos de qué fila suman 29 791?

2 ¿Qué número ocupa la posición 6 en la diagonal (1, 3, 7, 13, 21, ...)? ¿Y la posición 100? Generaliza el resultado.

3 ¿Qué número ocupa la posición 6 en la diagonal (1, 5, 11, 19, 29,...)? ¿Y la posición 100? Generaliza el resultado.

4 ¿Qué número ocupa la posición central en la fila 7? Generaliza el resultado.

CASIO División Educativa
Federación Española de Sociedades de Profesores de Matemáticas

04 | Regularidades numéricas
Torre de números impares

MATERIALES
Calculadora CASIO fx-82/85/350 SP X II Iberia

NIVEL EDUCATIVO
4º de ESO

ORIENTACIONES DIDÁCTICAS Y TÉCNICAS

- Esta actividad se plantea con la intención de buscar patrones en problemas aritméticos y de generalizar los resultados obtenidos.
- En la actividad se estudian sucesiones aritméticas de segundo orden y sucesiones de números cúbicos perfectos.
- Conviene hacer uso del menú de *Estadística bidimensional*, concretamente de la opción *Regresión cuadrática*, para calcular el término general de la sucesión.

EJEMPLO DE SOLUCIÓN

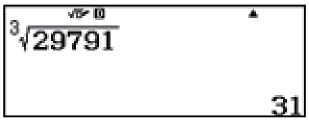
1

La sucesión correspondiente a las sumas de las filas es:

$$1,\ 3 + 5 = 8,\ 7 + 9 + 11 = 27,\ 13 + 15 + 17 + 19 = 64\ldots$$

Es decir, se trata de la sucesión de las potencias cúbicas de los números naturales: $1^3, 2^3, 3^3, 4^3\ldots\ n^3$.

En consecuencia, la fila cuyos elementos suman 29 791 es:

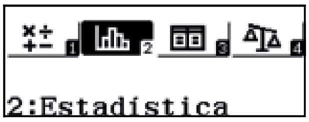


2

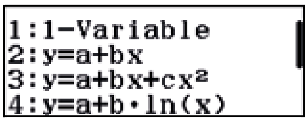
Para calcular el término general de la sucesión formada por los elementos de la primera diagonal (1, 3, 7, 13, 21, 31,...) se entra en el menú *Estadística* y se selecciona la opción correspondiente a la regresión cuadrática.

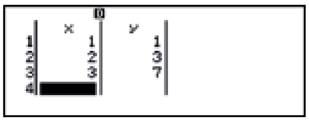
Seguidamente, basta con introducir los tres primeros términos que forman la sucesión:

MENU 2

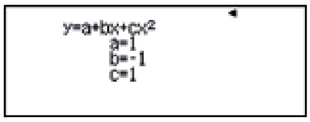


3

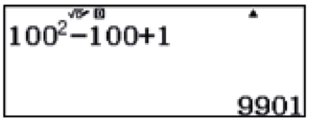




AC OPTN 3

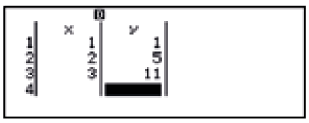


En consecuencia, el término general de la sucesión es $b_n = n^2 - n + 1$, y el término 100 es:

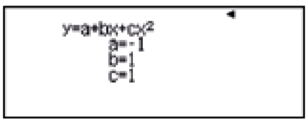


3

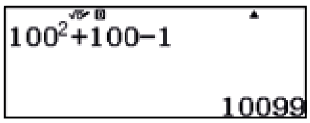
Se puede comprobar que se trata de una sucesión aritmética de orden 2:



AC OPTN 3



El término general de la sucesión es $c_n = n^2 + n - 1$ y el término 100 es:



4

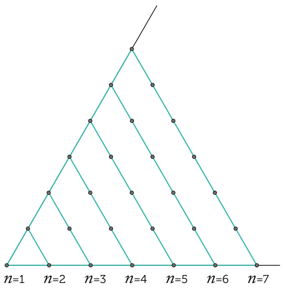
Fila	1	3	5	7	$2n - 1$
Número central	1	9	25	49	$(2n - 1)^2$

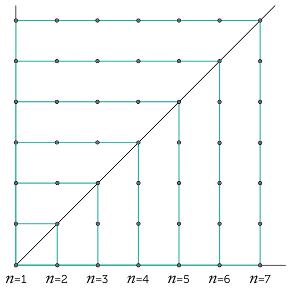
05 | Regularidades numéricas
Números poligonales

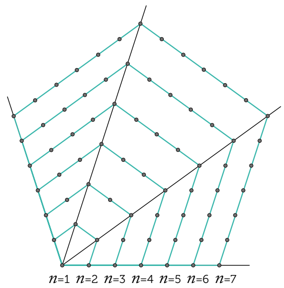
Laura apila sus lápices de colores en filas de forma que cada lápiz de una fila se coloca entre dos lápices de la fila inferior. Ha construido con los lápices una pirámide de diez filas y se pregunta cuántos lápices tiene y cuántos lápices necesitaría para apilar 15 filas.

En matemáticas, decimos que un número es poligonal si su representación mediante puntos, piedras, monedas, etc. puede recomponerse en forma de polígono regular. Existen números triangulares, cuadrados, pentagonales, hexagonales… A continuación los descubriremos y trabajaremos con alguna de sus propiedades.

1 Observa las figuras adjuntas y completa la tabla con el número de puntos que hay en cada figura según el valor de n:







Lados del polígono (p)			n						
			1	2	3	4	5	6	7
	3	Triangulares	1	3	6	10	15	21	
	4	Cuadrados	1	4	9				
	5	Pentagonales	1	5	12				
	6	Hexagonales	1	6	15				

2 Considera ahora el número de puntos que se añade a cada figura respecto de la figura anterior y completa la tabla.

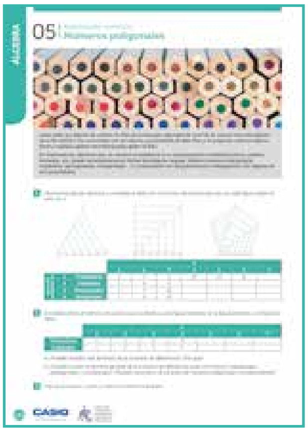
	n						
	1	2	3	4	5	6	7
Triangulares	1	2	3	4			
Cuadrados	1	3	5	7			

a) ¿Puedes escribir más términos de la sucesión de diferencias? ¿Por qué?

b) ¿Puedes escribir el término general de la sucesión de diferencias para los números hexagonales, heptagonales y octogonales? ¿Puedes reconstruir la sucesión de números poligonales correspondiente?

3 Calcula el octavo, noveno y décimo número triangular.

Números poligonales



MATERIALES

Calculadora CASIO fx-570/991 SP X II Iberia

NIVEL EDUCATIVO

3º de ESO

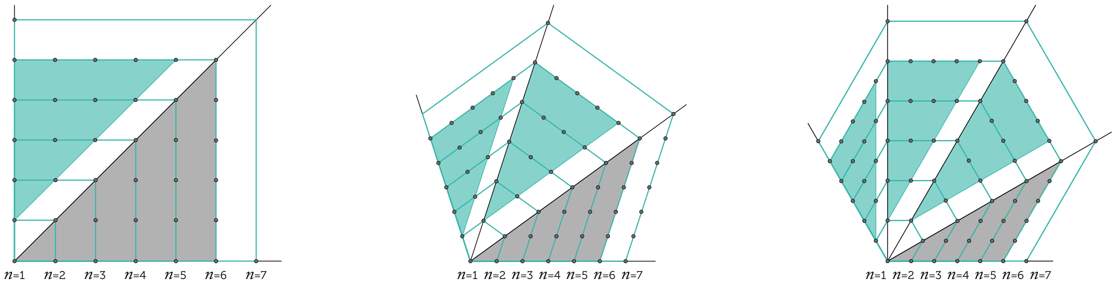
ORIENTACIONES DIDÁCTICAS Y TÉCNICAS

- Esta actividad tiene dos partes. La primera está diseñada para que el alumnado descubra que cualquier número poligonal se puede calcular a partir de dos números triangulares, según la siguiente fórmula:

$$Tp{,}n = T3{,}n + (p - 3) \cdot T3{,}n - 1$$

Donde $Tp{,}n$ es el n-ésimo número p-agonal y $T3{,}n$ y $T3{,}n - 1$ son los n-ésimo y n-1-ésimo números triangulares.

- Se trata de aprovechar el conocimiento que tiene el alumnado sobre progresiones para construir la tabla de números poligonales por columnas, conocida la sucesión de números triangulares. Si se estima oportuno, se pueden utilizar imágenes parecidas a las siguientes, como apoyo visual a los razonamientos.



- Se puede trabajar con la fórmula para la suma de los términos de una sucesión aritmética para obtener el término general de cualquier sucesión de números poligonales a partir de la progresión de las diferencias de términos sucesivos. En este caso, se trabajará con la tabla de números poligonales por filas.
- Para facilitar la automatización de los cálculos, se rellenará la tabla haciendo uso de la función CALC. La tecla (Σ▬) permite obtener los números poligonales como la suma de los n términos de una progresión aritmética.

EJEMPLO DE SOLUCIÓN

1

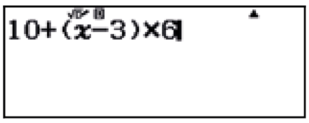
Para rellenar la cuarta columna de la tabla ($n = 4$), hay que calcular el valor de la expresión

$$Tp{,}4 = T3{,}4 + (p - 3) \cdot T3{,}3 \text{ para } p = 3, 4, 5 \text{ y } 6, \text{ donde } T3{,}4 = 10 \text{ y } T3{,}3 = 6.$$

Para ello, hay que introducir en la calculadora la expresión:

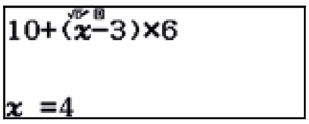
$$Tp{,}4 = 10 + (p - 3) \cdot 6$$

1 0 + (x − 3) × 6

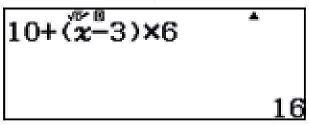


Seguidamente, se calculan los valores numéricos correspondientes:

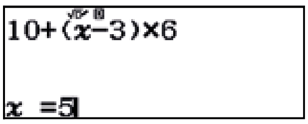
CALC 4 =



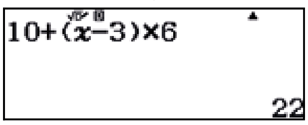
⇓



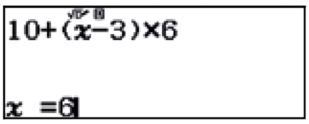
CALC 5 =



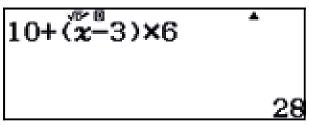
⇓



CALC 6 =



⇓



Números poligonales

Procediendo análogamente con el resto de columnas, se obtiene la tabla siguiente:

			n						
			1	2	3	4	5	6	7
Lados del polígono (p)	3	Triangulares	1	3	6	10	15	21	28
	4	Cuadrados	1	4	9	16	25	36	49
	5	Pentagonales	1	5	12	22	35	51	70
	6	Hexagonales	1	6	15	28	45	66	91

Opcionalmente, se puede completar la tabla hasta los números decagonales:

			n						
			1	2	3	4	5	6	7
Lados del polígono (p)	7	Heptagonales	1	7	18	34	55	81	112
	8	Octogonales	1	8	21	40	65	96	133
	9	Nonagonales	1	9	24	46	75	111	154
	10	Decagonales	1	10	27	52	85	126	175

2

Hasta ahora se ha trabajado en la forma de completar la tabla de arriba hacia abajo, relacionando los distintos tipos de números de una misma iteración y utilizando para ello solamente el concepto de progresión aritmética. Ahora se va a aprender a ampliar la tabla horizontalmente, considerando cada tipo de número de forma aislada, y descubriendo lo que tienen en común.

Se puede trabajar con tablas cómo las siguientes:

n	1	2	3	4	5	6	7	...	k
Triangulares	1	3	6	10	15	21	28	...	
Diferencias de términos sucesivos	1	2	3	4	5	6	7	...	k

n	1	2	3	4	5	6	7	...	k
Cuadrados	1	4	9	16	25	36	49	...	
Diferencias de términos sucesivos	1	3	5	7	9	11	13	...	$2k-1$

n	1	2	3	4	5	6	7	...	k
Pentagonales	1	5	12	22	35	51	70	...	
Diferencias de términos sucesivos	1	4	7	10	13	16	19	...	$3k-2$

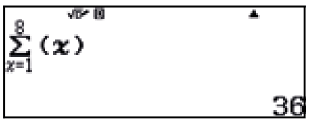
n	1	2	3	4	5	6	7	...	k
Octogonales	1	8	21	40	65	96	133	...	
Diferencias de términos sucesivos	1	7	13	19	25	31	37	...	$6k-5$

Los términos generales de las sucesiones de diferencias para los números hexagonales, heptagonales y octogonales son $4k-3$, $5k-4$ y $6k-5$, respectivamente.

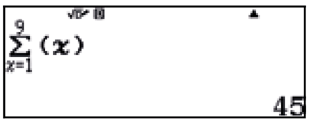
3

Para calcular los octavo, noveno y décimo números triangulares se hace uso de la tecla (Σ▬).

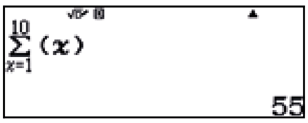
SHIFT x x ▶ 1 ▶ 8 =



◀ ◀ DEL 9 =



◀ ◀ DEL 1 0 =



Los valores de n en el sumatorio se han modificado manualmente haciendo uso de los cursores.

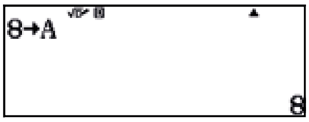
Números poligonales

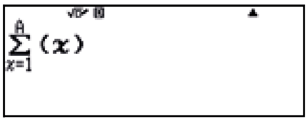
OBSERVACIÓN

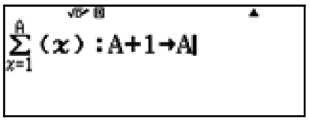
Se puede también hacer uso de las teclas [STO], ([Σ▬]) y la combinación [ALPHA] [∫▭] (que proporciona dos puntos ":").

Este método es algo más engorroso para series cortas, pero mucho más rápido cuando hay que generar un número elevado de términos.

[8] [STO] [(−)] [SHIFT] [x] [▶] [1] [▶] [ALPHA] [(−)] [▶] [ALPHA] [∫▭] [ALPHA] [(−)] [+] [1] [STO] [(−)]

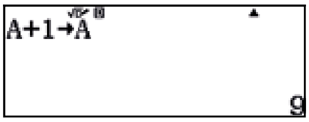


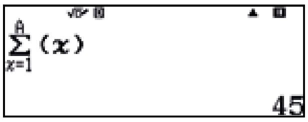


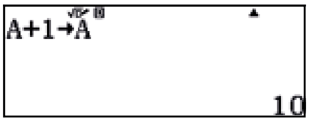


Lo que se hace es asignar el primer valor de n a la variable A y a continuación se escribe la fórmula, utilizando los dos puntos ":" para ejecutar dos cálculos en una misma línea. Seguidamente, se asigna a A el valor $A + 1$. La calculadora realiza de forma automática el primer cálculo para el valor original de A.

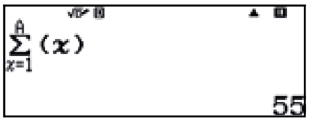
[=] [=] [=]





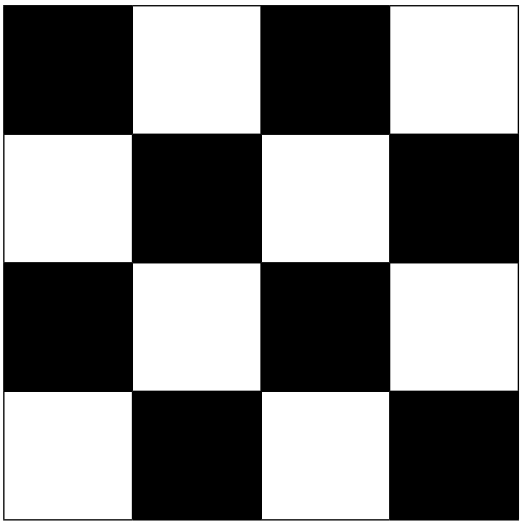


Al presionar a la tecla [=], se realiza la asignación de un nuevo valor a la variable A, después se calcula nuevamente la suma para el nuevo valor de A, y así sucesivamente.



Ampliación

1 Considera el tablero 4 x 4 de la figura:



a) ¿Cuántos cuadrados se pueden formar en el tablero? (cada uno de los cuadrados formados tiene que contener cuadrados completos blancos o negros).

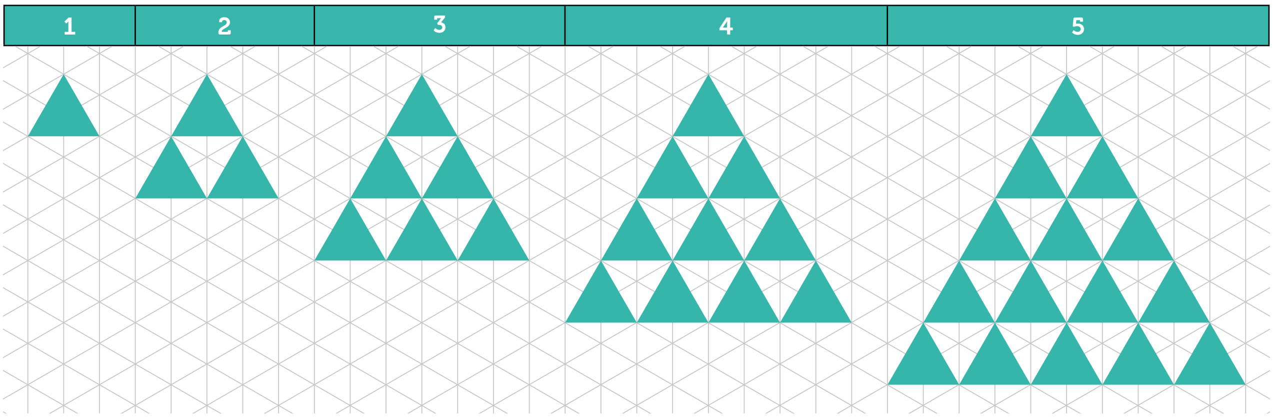
b) Si se dispusiera de un tablero 8 x 8, ¿cuántos cuadrados se podrían formar?

c) Si se dispusiera de un tablero n x n, ¿cuántos cuadrados se podrían formar?

06 | Regularidades numéricas
Triángulos y sumas

Es posible que en algún momento de tu infancia hayas tenido algún juego de construcciones geométricas con imanes. Si así ha sido, y aún lo conservas, te podrá ser de ayuda para realizar esta actividad. Si nunca lo has tenido, o no lo conservas, puedes utilizar mondadientes en su lugar.

1 Dibuja en tu cuaderno los cinco primeros términos de la sucesión, tal y como aparece en la imagen:

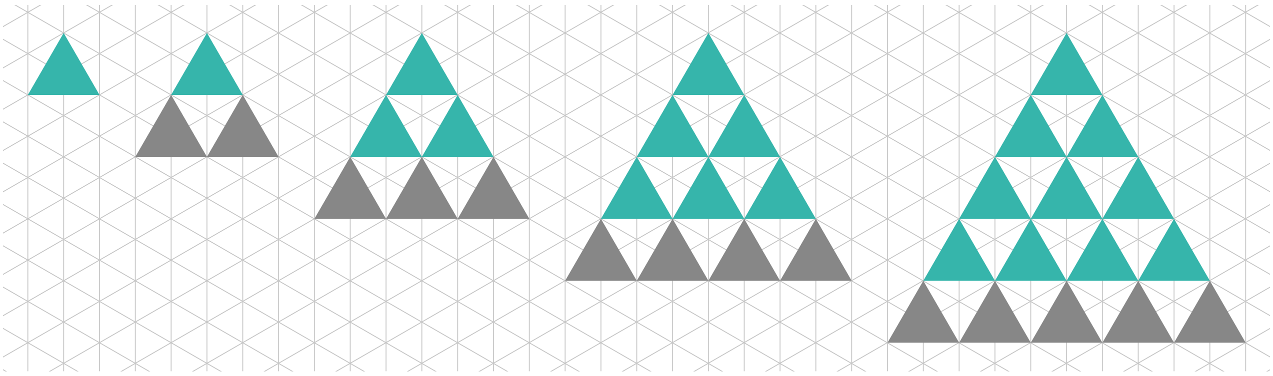


2 Completa la siguiente tabla con el número de triángulos que hay en cada iteración:

n	1	2	3	4	5	6	7
A_n	1	4	9				

Comenta con tus compañeros la técnica que has utilizado para contar los triángulos.

3 Cuenta los triángulos que se añaden en cada iteración, completa la tabla adjunta y calcula el término general de la sucesión.



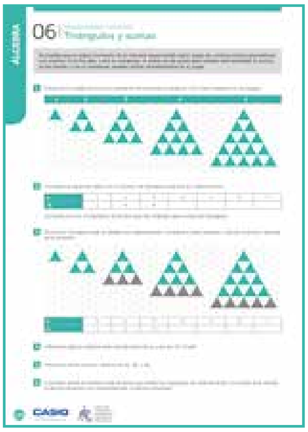
n	1	2	3	4	5	6	7
a_n	1	3	5				

4 ¿Observas alguna relación entre los términos de a_n y los de A_n? ¿Cuál?

5 Utilizando dicha relación, determina A_{15}, A_{16} y A_{18}.

6 Considera ahora el número total de lados que tienen los triángulos de cada iteración. Si tuvieras que realizar la décima iteración con mondadientes, ¿cuántos utilizarías?

06 Regularidades numéricas
Triángulos y sumas



MATERIALES
Calculadora CASIO fx-570/991 SP X II

NIVEL EDUCATIVO
3º de ESO

ORIENTACIONES DIDÁCTICAS Y TÉCNICAS

- La mayoría del alumnado, cuando se le pide que cuente los triángulos iguales que hay en cada iteración, tarde o temprano, añade los triángulos de una nueva fila a los que ya había considerado en la iteración anterior.
- Esta actividad está diseñada para que el alumnado deduzca que $\sum_{i=1}^{n}(2i-1)=n^2$.
- Con la actividad se pretende que el alumnado exprese la sucesión de números impares como una progresión aritmética, para posteriormente utilizar la fórmula de la suma de los n primeros términos de la progresión como medio para calcular un número al cuadrado.
- Para realizar la actividad se usará la función (Σ▬), a la que se accede mediante la combinación de teclas SHIFT x.

EJEMPLO DE SOLUCIÓN

1

Respuesta abierta.

2

n	1	2	3	4	5	6	7
A_n	1	4	9	16	25	36	49

El alumno puede utilizar el método de recuento que considere más adecuado.

3

n	1	2	3	4	5	6	7
a_n	1	3	5	7	9	11	13

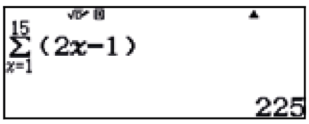
El término general de la sucesión es $a_n = 2n - 1$.

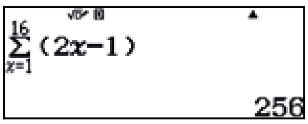
4

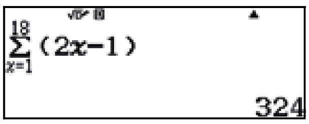
La relación entre las dos sucesiones puede expresarse como $A_n = A_{n-1} + a_n$.

5

De la relación anterior se tiene que $A_n = A_{n-1} + a_n \rightarrow A_n = A_{n-1} + 2n - 1$. En consecuencia, los términos A_{15}, A_{16} y A_{18} pueden determinarse como sumas de números impares.







6

El número de mondadientes se obtiene de multiplicar por 3 el número de triángulos sombreados de cada iteración.

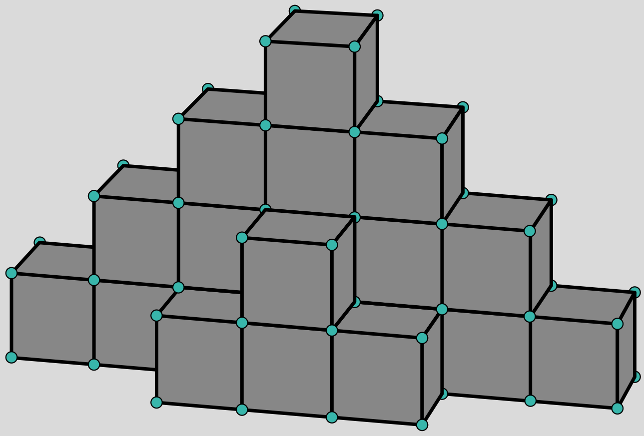
07 | Regularidades numéricas
Pirámides de cubos

Las figuras geométricas en el espacio pueden seguir interesantes patrones numéricos. Trata de encontrar dichos patrones en la siguiente figura:

Se observan dos especies de pirámides formadas por cubos. La primera de ellas, la más pequeña, está formada por 4 cubos y tiene 2 cubos de altura.

La segunda pirámide, situada tras la primera, tiene una altura dos cubos superior a la pirámide que le precede.

Cada capa tiene una altura dos cubos superior a la capa anterior, hasta alcanzar los 10 cubos de altura. A partir de esa capa, las siguientes tienen, sucesivamente, alturas inferiores en dos cubos a las capas anteriores.



1 ¿Cuántos cubos hay que utilizar para completar la figura que se ha descrito?

2 ¿Cuántos cubos habría que usar en total para construir una figura como la descrita pero de 50 cubos de altura?

07 | Regularidades numéricas
Pirámides de cubos

MATERIALES
Calculadora CASIO fx-570/991 SP X II Iberia

NIVEL EDUCATIVO
4º de ESO

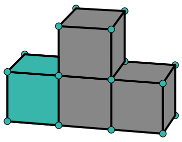
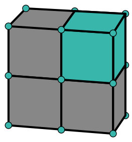
ORIENTACIONES DIDÁCTICAS Y TÉCNICAS

- Esta actividad se plantea para buscar patrones en problemas geométricos y generalizar resultados.
- Para realizar la actividad se hará uso de la función *Sumas finitas* de la calculadora.

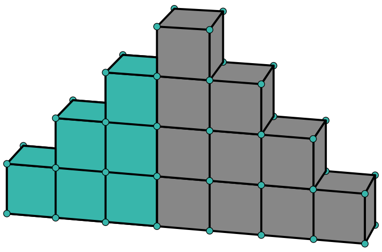
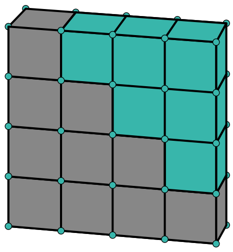
EJEMPLO DE SOLUCIÓN

1

La primera capa, de 2 cubos de altura, está compuesta por 4 cubos ($4 = 2^2$)

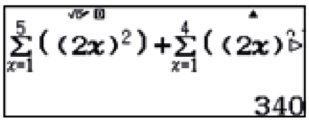



La segunda capa, de 4 cubos de altura, está compuesta por 16 cubos ($16 = 4^2$)

Como se observa, cada capa tiene tantos cubos como el cuadrado de su altura. En consecuencia, para una construcción de 10 cubos de altura, el total de cubos utilizados coincide con la suma de los cuadrados de los 5 primeros números pares consecutivos más la suma de los 4 primeros números pares consecutivos, que corresponde a las caras posteriores. Es decir:

$$\sum_{x=1}^{5}(2x)^2 + \sum_{x=1}^{4}(2x)^2$$

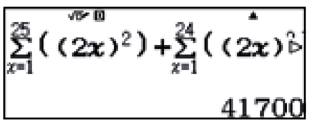


Por tanto, hacen falta 340 cubos.

2

En el caso de una construcción de 50 cubos de altura, el número de cubos requeridos es:

$$\sum_{x=1}^{25}(2x)^2 + \sum_{x=1}^{24}(2x)^2$$



En consecuencia, hacen falta 41 700 cubos.

08 | Regularidades numéricas
Números poligonales y números piramidales

Una sucesión $\{a_n\}n\in N$ es **polinomial de grado n** cuando el término general de dicha sucesión es un polinomio de grado n.

- Las progresiones aritméticas son sucesiones polinomiales de grado 1.
- La sucesión de término general $a_n = n^2 + 1$ es polinomial de grado 2.

Una sucesión $\{a_n\}n\in N$ es una **progresión aritmética** de orden k si la sucesión que se obtiene al realizar k veces las diferencias sucesivas de sus términos es constante.

Analicemos, por ejemplo, el caso de la sucesión $a_n = n^2 + 1$.

$a_n = n^2 + 1$	2		5		10		17		26
Primera diferencia sucesiva		3		5		7		9	
Segunda diferencia sucesiva			2		2		2		

Como se observa, la segunda diferencia sucesiva es constante, por lo que se trata de una progresión aritmética de orden 2.

Las sucesiones polinomiales de grado n son progresiones aritméticas de grado n.

1 Comprueba que la sucesión de números triangulares $T_n = \{1, 3, 6, 10, 15, ...\}$ es una progresión aritmética de orden superior y encuentra su expresión polinomial.

2 Utilizando la técnica anterior, halla el término general de los números cuadrados, pentagonales, hexagonales, heptagonales y octogonales.

3 Fíjate ahora solamente en los coeficientes líderes de los polinomios que has obtenido. ¿Existe alguna relación entre ellos? Responde a esta cuestión analizando el resto de coeficientes.

4 Ensaya una fórmula para los números decagonales.

5 Vamos a pensar ahora en 3D. Los números piramidales se obtienen si formamos pirámides con los correspondientes números poligonales, de forma que una pirámide de cuatro alturas y base triangular es la reconstrucción del número 20 = 1 + 3 + 6 + 10, o lo que es lo mismo, la suma de los cuatro primeros números triangulares. Comprueba que la sucesión de los números piramidales triangulares es una sucesión aritmética de orden tres y obtén su término general. Haz lo mismo con la sucesión de números piramidales cuadrados.

Números poligonales y números piramidales

MATERIALES

Calculadora CASIO fx-570/991 SP X II Iberia

NIVEL EDUCATIVO

1º de Bachillerato

ORIENTACIONES DIDÁCTICAS Y TÉCNICAS

- Aunque a priori pueda parecer que los sistemas de ecuaciones que se derivan de esta actividad son de tediosa resolución, incluso cuando se usa la calculadora, hay que resaltar el hecho de que los distintos sistemas solo se diferencian entre sí por los términos independientes, por lo que su resolución es solo cuestión de segundos.

- Para resolver los sistemas de ecuaciones que aparecen en la actividad se hará uso del modo *Ecuación/Función*.

EJEMPLO DE SOLUCIÓN

1

En primer lugar, hay que comprobar que la sucesión de los números triangulares es una progresión aritmética de orden superior.

Números triangulares	1		3		6		10		15
Primera diferencia sucesiva		2		3		4		5	
Segunda diferencia sucesiva			1		1		1		

La segunda diferencia sucesiva es constante, por lo que se trata de una progresión aritmética de orden 2. El término general de dicha sucesión es de la forma: $T_n = an^2 + bn + c$. Para determinar los coeficientes basta con resolver el siguiente sistema de ecuaciones:

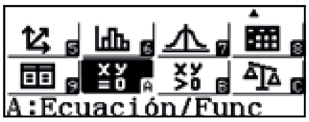
$$\left.\begin{array}{l} T_1 \longrightarrow 1 = a + b + c \\ T_2 \longrightarrow 3 = 4a + 2b + c \\ T_3 \longrightarrow 6 = 9a + 3b + c \end{array}\right\}$$

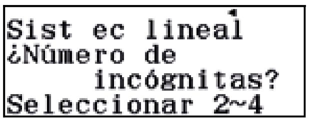
Se trata de un sistema de tres ecuaciones con tres incógnitas. Si en lugar de utilizar las incógnitas a, b y c se usan las incógnitas x, y y z, se tiene:

$$\left.\begin{array}{l} 1 = x + y + z \\ 3 = 4x + 2y + z \\ 6 = 9x + 3y + z \end{array}\right\}$$

Para resolver el sistema se accede al menú *Ecuación/Función*, se selecciona la opción *Sistema de ecuaciones lineales* y se indica el número de incógnitas:

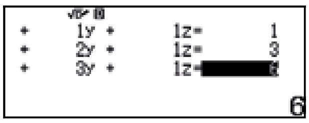
MENU (−) 1 3

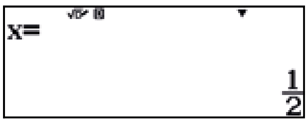


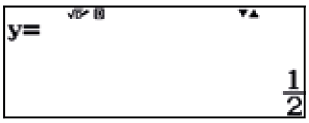


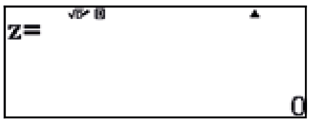
Seguidamente se introduce el sistema y se resuelve:

= = =









En consecuencia, el término general de la sucesión de números triangulares resulta:

$$T_{3,n} = \frac{1}{2}n^2 + \frac{1}{2}n$$

Números poligonales y números piramidales

2

Para resolver esta actividad se puede recurrir a las tablas que se obtuvieron en la actividad 05 Números poligonales.

Lados del polígono (p)			n = 1	2	3	4
	3	Triangulares	1	3	6	10
	4	Cuadrados	1	4	9	16
	5	Pentagonales	1	5	12	22
	6	Hexagonales	1	6	15	28
	7	Heptagonales	1	7	18	34
	8	Octogonales	1	8	21	40

Se plantea, en cada caso, el sistema de ecuaciones y se resuelve de forma análoga a la actividad 1.

Cuadrados:

$$\left.\begin{aligned} x+y+z&=1\\ 4x+2y+z&=4\\ 9x+3y+z&=9 \end{aligned}\right\}$$

x= 1

y= 0

z= 0

Pentagonales:

$$\left.\begin{aligned} x+y+z&=1\\ 4x+2y+z&=5\\ 9x+3y+z&=12 \end{aligned}\right\}$$

x= $\frac{3}{2}$

y= $-\frac{1}{2}$

z= 0

Hexagonales:

$$\left.\begin{aligned} x+y+z&=1\\ 4x+2y+z&=6\\ 9x+3y+z&=15 \end{aligned}\right\}$$

x= 2

y= -1

z= 0

Heptagonales:

$$\left.\begin{aligned} x+y+z&=1\\ 4x+2y+z&=7\\ 9x+3y+z&=18 \end{aligned}\right\}$$

x= $\frac{5}{2}$

y= $-\frac{3}{2}$

z= 0

Octogonales:

$$\left.\begin{aligned} x+y+z&=1\\ 4x+2y+z&=8\\ 9x+3y+z&=21 \end{aligned}\right\}$$

x= 3

y= -2

z= 0

3

Los coeficientes de los términos generales son:

	Triangular	Cuadrado	Pentagonal	Hexagonal	Heptagonal	Octogonal	...	p
Coeficiente de n^2	$\frac{1}{2}$	1	$\frac{3}{2}$	2	$\frac{5}{2}$	3		$\frac{p-2}{2}$

	Triangular	Cuadrado	Pentagonal	Hexagonal	Heptagonal	Octogonal	...	p
Coeficiente de n	$\frac{1}{2}$	0	$-\frac{1}{2}$	-1	$-\frac{3}{2}$	-2		$-\frac{p-4}{2}$

4

El alumnado no debe tener ninguna dificultad en encontrar el término general de la sucesión de números decagonales, es más, llegado el caso y dependiendo de cómo se haya desarrollado la unidad, se puede ensayar una fórmula para el término general de la sucesión de números *p*-agonales.

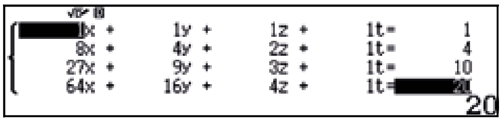
$$T_{p,n} = \frac{p-2}{2} \cdot n^2 - \frac{p-4}{2} \cdot n$$

Que para el caso de $p = 10$ quedaría de la siguiente forma:

$$T_{10,n} = 4n^2 - 3n$$

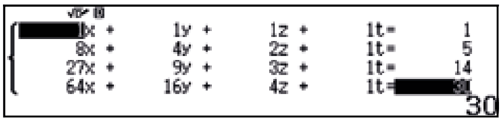
5

Para el caso de los números piramidales triangulares, una vez comprobado que se trata de una sucesión aritmética de orden tres, el sistema a resolver es:



, quedando como término general $P_{3,n} = \frac{x^3}{6} + \frac{x^2}{2} + \frac{x}{13}$

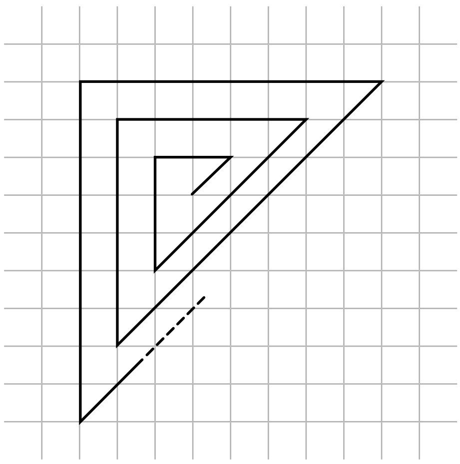
Para el caso de los números piramidales cuadrangulares se obtiene:



, quedando, en este caso, $P_{4,n} = \frac{x^3}{3} + \frac{x^2}{2} + \frac{x}{6}$

Ampliación

1 En un papel cuadriculado se ha dibujado la siguiente cenefa de 999 segmentos. (Cada cuadrícula mide 5 mm de lado)



a) Calcula la longitud de la línea poligonal.

b) Calcula la longitud de la línea poligonal con una aproximación a metros.

09 | Fractales: el conjunto de Cantor
¿Sabes qué son los fractales?

Según el diccionario de la lengua española de la RAE, un **fractal** es una «estructura iterativa que tiene la propiedad de que su aspecto y distribución estadística no cambian cualquiera que sea la escala con que se observe.»

Atendiendo a esta definición, podemos afirmar que el brocoli de la fotografía superior es un fractal, ya que su apariencia no cambia bajo cambios de escala.

Un modelo fractal muy sencillo es el *conjunto de Cantor*. Para su construcción, en 1883, Georg Cantor dividió un segmento en tres partes iguales y eliminó la parte central, repitiendo este procedimiento de forma sucesiva con los segmentos resultantes, tal y como muestra la figura.

1 Dibuja las cinco primeras iteraciones del *conjunto de Cantor* en la siguiente plantilla.

2 Considera las ocho primeras iteraciones partiendo de un segmento de una unidad de longitud.

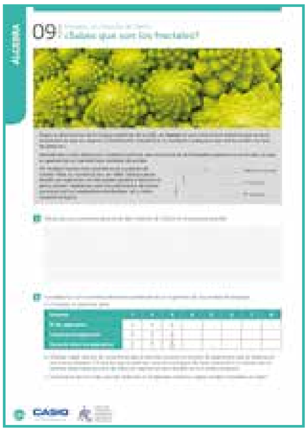
a) Completa la siguiente tabla:

Iteración	1	2	3	4	5	6	7	8
Nº de segmentos	2	4	8					
Longitud de segmentos	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{9}$	$\frac{1}{27}$					
Suma de todos los segmentos	$\frac{2}{3}$	$\frac{4}{9}$	$\frac{8}{27}$					

b) ¿Puedes hallar una ley de recurrencia que te permita conocer el número de segmentos que se obtiene en la k-ésima iteración? ¿Y una ley que te permita conocer la longitud de cada segmento? ¿Y una ley que te permita determinar la suma de todos los segmentos que resultan en la k-ésima iteración?

c) ¿Se parecen las fórmulas que has obtenido en el apartado anterior a algún modelo estudiado en clase?

¿Sabes qué son los fractales?



MATERIALES
Calculadora CASIO fx-82/85/350 SP X II o superior

NIVEL EDUCATIVO
3º de ESO

ORIENTACIONES DIDÁCTICAS Y TÉCNICAS
- Con esta actividad se pretende que el alumno estudie el comportamiento de regularidades sencillas realizando manipulaciones y que sea capaz de simbolizar algebraicamente dichas regularidades.
- Es conveniente que el alumnado haya trabajado previamente en el aula con regularidades y expresiones simbólicas que describan sucesiones numéricas sencillas.

EJEMPLO DE SOLUCIÓN

1

Respuesta abierta.

2

a) Para rellenar la tabla se puede hacer uso de la tecla [Ans].

[2] [=] → 2 = 2
[Ans] [×] [2] [=] → Ans×2 = 4
[=] → Ans×2 = 8
[=] → Ans×2 = 16

La longitud de los segmentos de cada iteración se obtiene de multiplicar por 1/3 la longitud de los segmentos de la iteración anterior.

[1] [▭/▭] [3] [=] → $\frac{1}{3}$ = $\frac{1}{3}$
[Ans] [×] [▭/▭] [1] [▼] [3] [=] → Ans×$\frac{1}{3}$ = $\frac{1}{9}$
[=] → Ans×$\frac{1}{3}$ = $\frac{1}{27}$
[=] → Ans×$\frac{1}{3}$ = $\frac{1}{81}$

La suma de todos los segmentos de una iteración se obtiene de multiplicar por 2/3 la suma de todos los segmentos de la iteración anterior.

[2] [▭/▭] [3] [=] → $\frac{2}{3}$ = $\frac{2}{3}$
[Ans] [×] [2] [▭/▭] [3] [=] → Ans×$\frac{2}{3}$ = $\frac{4}{9}$
[=] → Ans×$\frac{2}{3}$ = $\frac{8}{27}$
[=] → Ans×$\frac{2}{3}$ = $\frac{16}{81}$

La tabla queda, entonces, de la siguiente manera:

Iteración	1	2	3	4	5	6	7	8
Nº de segmentos	2	4	8	16	32	64	128	256
Longitud de segmentos	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{9}$	$\frac{1}{27}$	$\frac{1}{81}$	$\frac{1}{243}$	$\frac{1}{729}$	$\frac{1}{2187}$	$\frac{1}{6561}$
Suma de todos los segmentos	$\frac{2}{3}$	$\frac{4}{9}$	$\frac{8}{27}$	$\frac{16}{81}$	$\frac{32}{243}$	$\frac{64}{729}$	$\frac{128}{2187}$	$\frac{256}{6561}$

¿Sabes qué son los fractales?

b) A partir de la tabla, el alumno puede determinar las leyes que permiten expresar:

El número de segmentos de la k-ésima interacción: 2^k

La longitud de cada uno de esos segmentos: $\left(\frac{1}{3}\right)^k$

La suma total de los segmentos de esa iteración: $\left(\frac{2}{3}\right)^k$

Iteración	1	2	3	4	5	6	7	8	...	k
Nº de segmentos	2	4	8	16	32	64	128	256	...	2^k
Longitud de segmentos	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{9}$	$\frac{1}{27}$	$\frac{1}{81}$	$\frac{1}{243}$	$\frac{1}{729}$	$\frac{1}{2187}$	$\frac{1}{6561}$	...	$\left(\frac{1}{3}\right)^k$
Suma de todos los segmentos	$\frac{2}{3}$	$\frac{4}{9}$	$\frac{8}{27}$	$\frac{16}{81}$	$\frac{32}{243}$	$\frac{64}{729}$	$\frac{128}{2187}$	$\frac{256}{6561}$	...	$\left(\frac{2}{3}\right)^k$

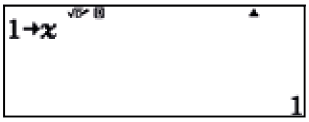
c) Las expresiones que se han obtenido recuerdan a los modelos de las progresiones geométricas.

OBSERVACIÓN

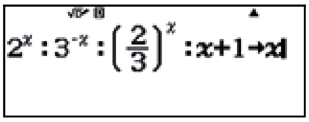
Una vez se conocen las expresiones algebraicas correspondientes a la k-ésima iteración, se puede rellenar la tabla de otro modo distinto al empleado en el apartado a). Consiste en rellenar la tabla columna a columna, calculando los valores correspondientes a cada iteración mediante un procedimiento un poco más complejo.

En primer lugar, se asigna el valor 1 a la variable x, que responde al valor de la iteración. Seguidamente, se escriben las expresiones que se desean evaluar, separadas por el signo de los dos puntos (al que se accede mediante ALPHA ∟) y, a continuación, se asigna a la variable x el valor $x + 1$, pasando así a la siguiente iteración.

1 STO x

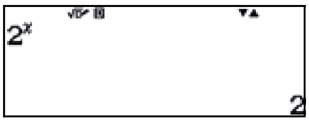


$x^■$ x ▶ ALPHA ∟ 3 $x^■$ (−) x ▶ ALPHA ∟ (▭ 2 ▼ 3 ▶) $x^■$ x ▶ ALPHA ∟ x + 1 STO x

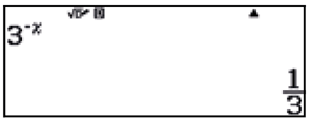


De esta forma, cada vez que se pulsa =, se obtiene el valor numérico de las expresiones y se incrementa en una unidad el valor de la variable.

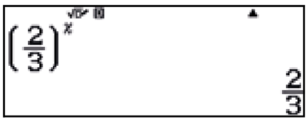
=



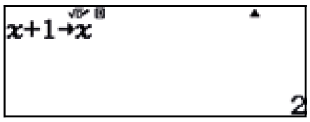
=



=

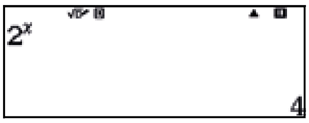


=

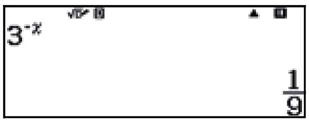


Se procede de igual manera con la siguiente iteración:

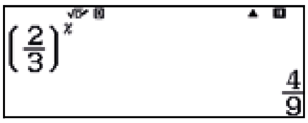
=



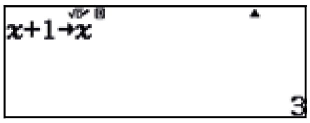
=



=



=



09 | Fractales: el conjunto de Cantor
¿Sabes qué son los fractales?

Ampliación

1 El *triángulo de Sierpinski* es un fractal que puede obtenerse a partir de cualquier triángulo. En este caso, se parte de un triángulo equilátero y se dibuja un nuevo triangulo cuyos vértices coinciden con los puntos medios de los lados del triángulo anterior.

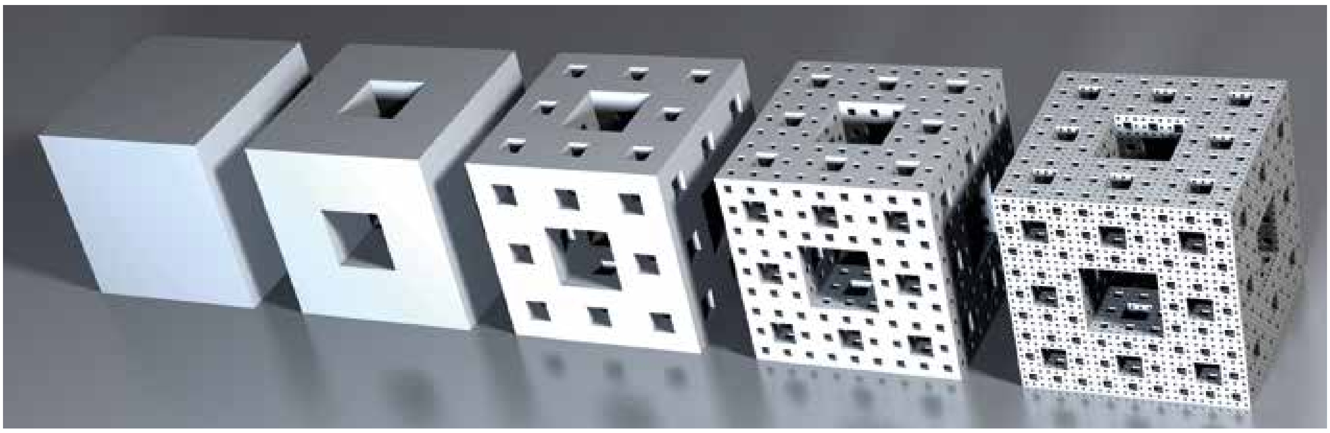
Figura inicial | Iteración 1 | Iteración 2 | Iteración 3 | Iteración 4

Considera los triángulos coloreados de la figura superior y completa la siguiente tabla con las 8 primeras iteraciones. Toma el área de la figura inicial igual a 1 u^2.

Iteración	1	2	3	4	5	6	7	8
Nº de triángulos								
Área de cada triángulo								
Suma de las áreas								

2 La *esponja de Menger*, también conocida como *cubo de Menger*, es un fractal tridimensional que se obtiene a partir de un cubo. Para ello se divide un cubo en 3 × 3 × 3 cubos de menor tamaño y se extrae el cubo central y los cubos centrales de cada cara sucesivamente.

Figura inicial | Iteración 1 | Iteración 2 | Iteración 3 | Iteración 4



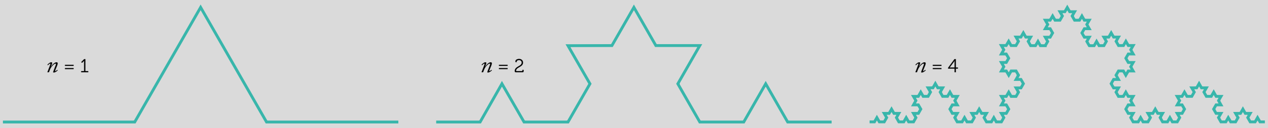
Completa la siguiente tabla con las 8 primeras iteraciones. Considera la arista del cubo inicial igual a 1 u.

Iteración	1	2	3	4	5	6	7	8
Nº de cubos								
Volumen de cada cubo								
Suma de los volúmenes								

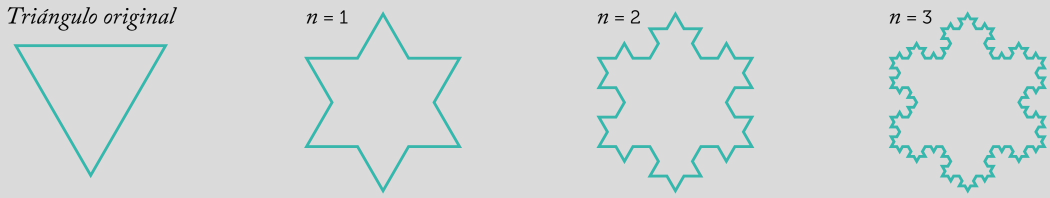
10 | Fractales: la curva de Koch
Fractales en copos de nieve

En 1904 el matemático sueco Helge von Koch dividió un segmento en tres partes iguales, eliminó el segmento central y construyó un triángulo equilátero cuya base era el segmento eliminado.

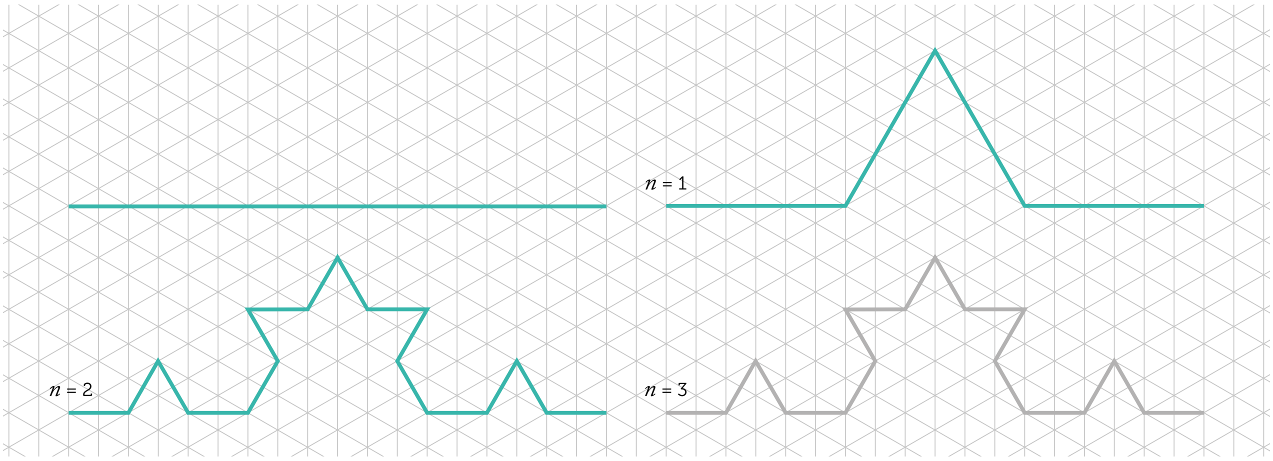
Repitió el proceso anterior de forma indefinida y obtuvo una curva poligonal conocida como *curva de Koch*.



La aplicación de este proceso reiterativo sobre los lados de un triángulo equilátero da lugar al conocido como *copo de nieve de Koch*.



1 Dibuja sobre la plantilla la tercera iteración.



2 Completa la siguiente tabla, partiendo de un segmento de 1 unidad de longitud:

Iteración	1	2	3	4	5	6	…	*k*	…
Nº de segmentos	4						…		…
Longitud de segmentos	$\frac{1}{3}$						…		…
Suma de todos los segmentos	$\frac{4}{3}$						…		…

a) Halla la ley de recurrencia que permite conocer el número de segmentos que se obtienen en la *k*-ésima iteración.

b) ¿Puedes obtener una ley que permita conocer la longitud de los segmentos? ¿Y la suma de todos los segmentos en la *k*-ésima iteración? ¿Y el número de triángulos que se añaden en cada iteración?

c) Las fórmulas que has obtenido en el apartado anterior, ¿se parecen a algún modelo que hayas estudiado en clase?

10 | Fractales: la curva de Koch
Fractales en copos de nieve

MATERIALES
Calculadora CASIO fx-82/85/350 SP X II Iberia

NIVEL EDUCATIVO
3º de ESO

ORIENTACIONES DIDÁCTICAS Y TÉCNICAS

- Con esta actividad se pretende que el alumno estudie de forma manipulativa (dibujando) el comportamiento de regularidades sencillas y que sea capaz de caracterizar algebraicamente estas regularidades.
- Es conveniente que el alumnado haya trabajado anteriormente en el aula con regularidades y expresiones simbólicas que describen sucesiones numéricas sencillas.
- La tabla se puede rellenar por filas, utilizando la tecla [Ans], o por columnas, escribiendo las expresiones que se quieren evaluar, separadas por dos puntos, y asignado un valor inicial a la variable.
- Para saber cómo se utiliza la tecla [Ans], a la hora de rellenar la tabla, se puede consultar la ficha 09 ¿Sabes qué son los fractales?

EJEMPLO DE SOLUCIÓN

2

Para rellenar la tabla, se asigna el valor 1 a la variable x, seguidamente, se escriben las expresiones que se desean evaluar, separadas por el signo de los dos puntos, y, a continuación, se asigna a la variable x el valor $x + 1$.

[1] [STO] [)]

$1 \rightarrow x$ 　　1

[4] [$x^{\blacksquare}$] [x] [▶] [ALPHA] [∟] [1] [$\frac{\blacksquare}{\blacksquare}$] [3] [$x^{\blacksquare}$] [$x$] [▶] [▶] [ALPHA]
[∟] [(] [$\frac{\blacksquare}{\blacksquare}$] [3] [▼] [4] [▶] [)] [$x^{\blacksquare}$] [$x$] [▶] [ALPHA] [∟] [$x$] [+] [1] [STO] [)]

$4^x : \frac{1}{3^x} : \left(\frac{4}{3}\right)^x : x+1 \rightarrow x$

De esta forma, cada vez que se pulse [=], se obtendrá el valor numérico de las expresiones y se incrementará en una unidad el valor de la variable que corresponde al número de la iteración:

[=]	[=]	[=]	[=]
4^x 　4	$\frac{1}{3^x}$ 　$\frac{1}{3}$	$\left(\frac{4}{3}\right)^x$ 　$\frac{4}{3}$	$x+1 \rightarrow x$ 　2

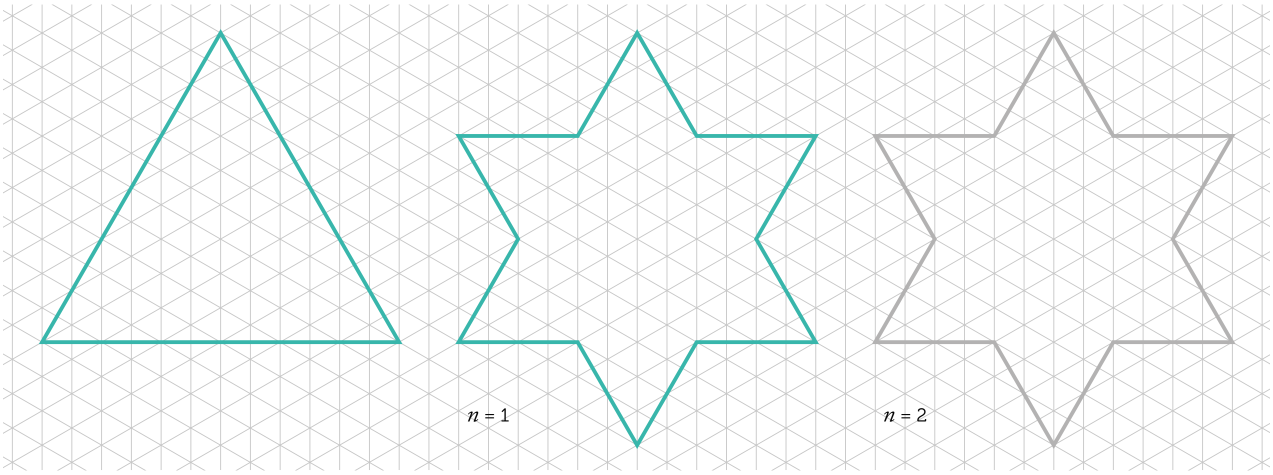
Pulsando [=] de manera reiterada, se irá rellenando la tabla, columna a columna, para cada iteración.

Iteración	**1**	**2**	**3**	**4**	**5**	**6**	**...**	***k***	**...**
Nº de segmentos	4	16	64	256	1024	4906	...	4^k	...
Longitud de segmentos	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{9}$	$\frac{1}{27}$	$\frac{1}{81}$	$\frac{1}{243}$	$\frac{1}{729}$	...	$\frac{1}{3^k}$	...
Suma de todos los segmentos	$\frac{4}{3}$	$\frac{16}{9}$	$\frac{64}{27}$	$\frac{256}{81}$	$\frac{1024}{243}$	$\frac{4906}{729}$	...	$\left(\frac{4}{3}\right)^k$	...

10 Fractales: la curva de Koch
Fractales en copos de nieve

Ampliación

1 Dibuja la segunda iteración partiendo de un triángulo equilátero:



2 Completa la tabla siguiente partiendo de un triángulo equilátero de 1 unidad de lado:

Iteración	0	1	2	3	4	5	...	*k*	...
Nº de lados	3						...		...
Longitud de cada lado	1						...		...
Perimetro de la figura	3						...		...
Nº de nuevos triángulos	1						...		...

a) ¿Puedes calcular una ley de recurrencia que te permita conocer el número de lados que se obtienen en la *k*-ésima iteración? ¿Y para conocer la longitud de cada lado? ¿Y para calcular el perímetro?

b) ¿Las fórmulas que has obtenido en el apartado anterior, ¿se parecen a algún modelo que hayas estudiado en clase?

c) Cómo se comporta el perímetro a medida que va aumentando el número de iteraciones?

3 Calcula el área de las figuras obtenidas en las iteraciones 0 y 1. ¿Crees que el área se comportará de la misma forma que el perímetro a medida que va aumentando el número de iteraciones? Justifica tu respuesta.

Problema

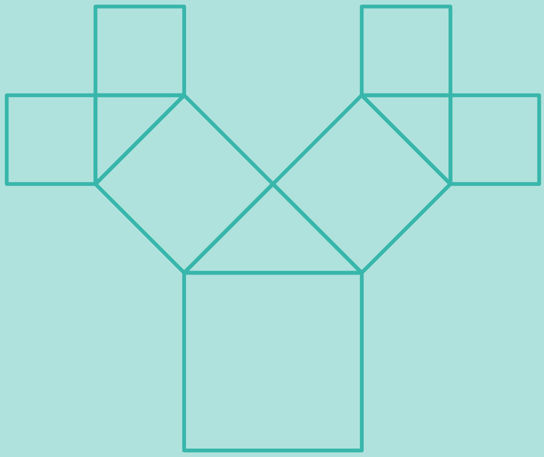
La altura del árbol pitagórico.

Durante su primer año de vida, el árbol pitagórico solo crece por su tronco, que es un cuadrado.

Durante su segundo año de vida, un triángulo rectángulo isósceles crece en la parte superior del tronco, de manera que la hipotenusa del triángulo coincide con el lado superior del cuadrado. De los catetos de ese triángulo emergen las dos primeras ramas, también de forma cuadrada.

Este patrón de crecimiento se repite cada año, como muestra la figura adjunta, en la que se ha representado un árbol pitagórico de tres años.

Considera que el tronco (es decir, el primer cuadrado) tiene 1 m de lado y calcula la altura del árbol a los 4 y a los 16 años. Generaliza el resultado que obtengas.



En la figura adjunta se ha representado un árbol pitagórico de 6 años de vida. Como se observa, la altura tras cuatro años de vida es igual a la longitud del segmento $\overline{AE}$.

Las longitudes que crece el árbol cada año son:

$$\overline{AB}\ ,\ \overline{BC}\ ,\ \overline{CD}\ ,\ \overline{DE}\ ,\ \overline{EF}\ ,\ \overline{FG}\ ,\ \ldots$$

Es decir:

$$1,\ 1,\ \frac{1}{2},\ \frac{1}{2},\ \frac{1}{4},\ \frac{1}{4},\ \frac{1}{8},\ \frac{1}{8},\ \ldots$$

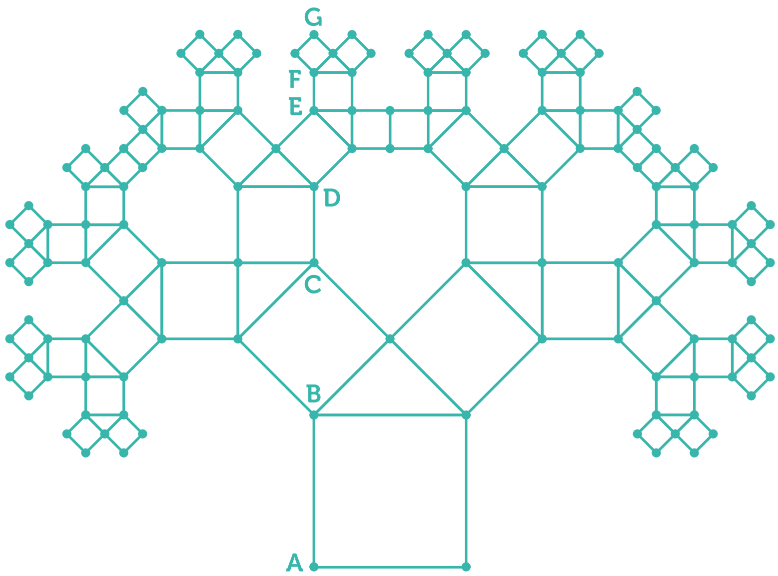
Sea $n = 1,2,3,4,\ldots$ los años transcurridos, la altura por año del árbol pitagórico es:

$$H_{2n-1} = 2 \cdot \left(1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \ldots + \frac{1}{2^{n-1}}\right) - \frac{1}{2^{n-1}}$$

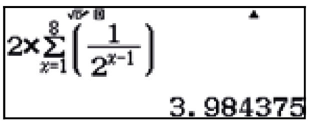
$$H_{2n} = 2 \cdot \left(1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \ldots + \frac{1}{2^{n-1}}\right)$$

$$H_4 = 2 \cdot \left(1 + \frac{1}{2}\right) = 3 \text{ m}$$

$$H_{16} = H_{2 \cdot 8} = 2 \cdot \left(\sum_{x=1}^{8} \frac{1}{2^{x-1}}\right)$$



Por tanto, la altura, transcurridos 16 años es:



Es decir, de aproximadamente 3,98 m.

11 | Regularidades numéricas
Números metálicos

Los números metálicos son el conjunto de números que tienen, entre una serie de características comunes, la propiedad de que llevan el nombre de un metal. El más conocido de la familia es el número de oro (número áureo), que ha sido utilizado como base de proporciones para componer música y diseñar esculturas, pinturas y edificios.

1 Considera la sucesión 1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, … dada por la ley de recurrencia $a_{n+1} = a_n + a_{n-1}$ y calcula los cocientes $\frac{a_{n+1}}{a_n}$.

2 Generaliza el resultado anterior, tomando como valores de a_1 y a_2 los números que consideres oportuno y calculando 25 o 30 términos (utiliza la ley de recurrencia $a_{n+1} = a_n + a_{n-1}$). Comenta los resultados que obtengas.

3 Considerada la sucesión dada por la ley de recurrencia $a_{n+1} = a_n + 2a_{n-1}$, donde $a_1 = 3$ y $a_2 = 7$, y calcula los treinta primeros términos. A continuación, considera la sucesión de los cocientes $\frac{a_{n+1}}{a_n}$ y comprueba que converge al número de cobre $\sigma_{Cu} \cong 2$.

4 Estudia la sucesión de cocientes $\frac{a_{n+1}}{a_n}$. Parte de los valores $a_1 = 4$ y $a_2 = 9$ y utiliza la ley de recurrencia $a_{n+1} = 2a_n + a_{n-1}$. Comprueba que se obtiene el número de plata.

5 Elige distintos valores de b_1 y b_2 para la ley de recurrencia $b_{n+1} = 3b_n + b_{n-1}$ y comprueba que la sucesión de cocientes $\frac{b_{n+1}}{b_n}$ tiende al número de bronce.

6 Utiliza la ley de recurrencia $b_{n+1} = b_n + 3b_{n-1}$ a partir de dos generadores arbitrarios y comprueba que la sucesión de cocientes genera un nuevo número metálico.

7 A partir de los valores $a_1 = 5$ y $a_2 = 1$ y la ley de recurrencia $a_{n+1} = 2a_n + 2a_{n-1}$, comprueba que la sucesión de cocientes genera el número de platino.

8 Generaliza los resultados obtenidos en las actividades anteriores. Comprueba que se obtienen los mismos resultados, independientemente de los elementos generadores y del número de términos de la sucesión y observa que el número obtenido depende únicamente de la ley de recurrencia.

9 Resuelve distintas ecuaciones cuadráticas del tipo $x^2 - px - q = 0$ para diversos valores de p y q, siendo p y q números naturales. Comprueba que las soluciones de la ecuación son números irracionales y define la sucesión numérica que los genera.

10 Observa que los números de bronce y de níquel tienen la misma parte decimal. Comprueba si se puede generalizar la condición que has considerado, resolviendo distintas ecuaciones.

Números metálicos

MATERIALES

Calculadora CASIO fx 570/991 SP X II Iberia

NIVEL EDUCATIVO

3º de ESO

ORIENTACIONES DIDÁCTICAS Y TÉCNICAS

- El objetivo de esta actividad es que el alumno obtenga y manipule expresiones simbólicas que describen sucesiones numéricas.
- Se pretende que el alumno calcule términos de sucesiones usando una ley de formación a partir de datos anteriores y que observe regularidades que incluyen patrones recursivos.
- Se pretende que el alumno aprenda a utilizar la hoja de cálculo y que conozca distintos números irracionales que se generan mediante sucesiones particulares.
- En general, se observa que, con independencia de los números generadores de la serie, los resultados que se obtienen con distintas relaciones de recurrencia de la forma $a_{n+1} = p \cdot a_n + q \cdot a_{n-1}$, según algunos valores de p y q, son los números metálicos:

Nombre	p	q	Valor
Oro	1	1	$\Phi = \sigma_{Au} = \dfrac{1+\sqrt{5}}{2} \approx 1{,}61803398874988$
Plata	2	1	$\sigma_{Ag} = 1 + \sqrt{2} \approx 2{,}414213562$
Bronce	3	1	$\sigma_{Br} = \dfrac{3+\sqrt{13}}{2} \approx 3{,}302775638$
Cobre	1	2	$\sigma_{Cu} \approx 2$
Níquel	1	3	$\sigma_{Ni} = \dfrac{1+\sqrt{13}}{2} \approx 2{,}302775638$
Platino	2	2	$\sigma_{Pt} = 1 + \sqrt{3} \approx 2{,}732050808$

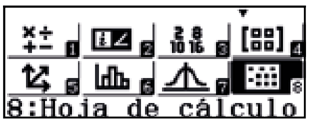
- Los miembros de la familia de números metálicos son, también, las soluciones positivas de ecuaciones cuadráticas del tipo $x^2 - px - q = 0$, siendo p y q números naturales.
- En esta actividad se hará uso de la *Hoja de cálculo* que incorpora la calculadora y de las opciones del menú *Ecuación/Función* que permiten resolver ecuaciones y sistemas.

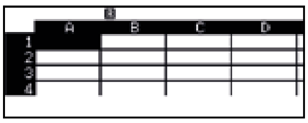
EJEMPLO DE SOLUCIÓN

1

En primer lugar, se entra en el menú *Hoja de cálculo*:

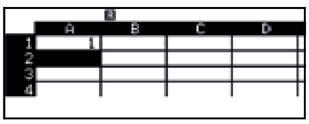
MENU 8





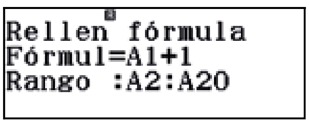
Seguidamente se introduce el valor 1 en la celda A1 y se introduce en la celda A2 la fórmula A1+1, que se extiende en el rango A1:A20:

1 =



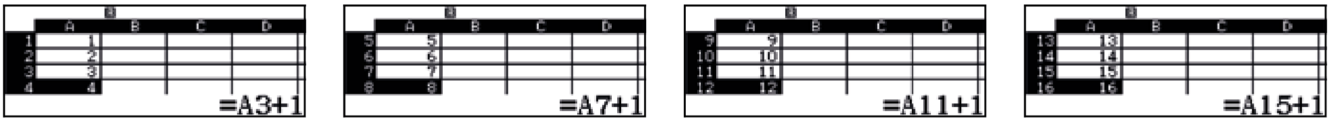
OPTN 1

ALPHA (–) 1 + 1 =



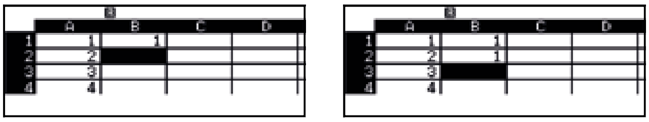
Números metálicos

Se completa, así, la columna A1:



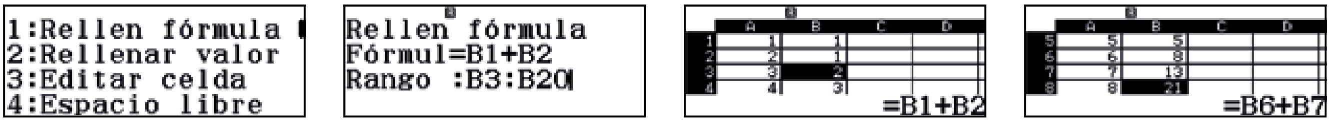
A continuación se introduce un 1 en la celda B1 y otro 1 en la celda B2:

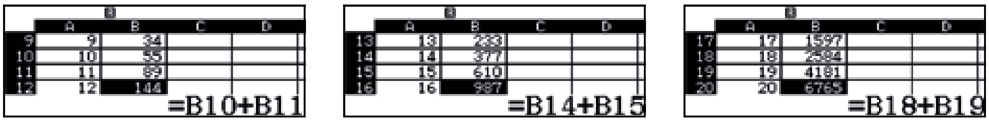
1 = 1 =



Seguidamente se introduce en la celda B3 la fórmula B1 + B2 y se extiende al rango B3:B20:

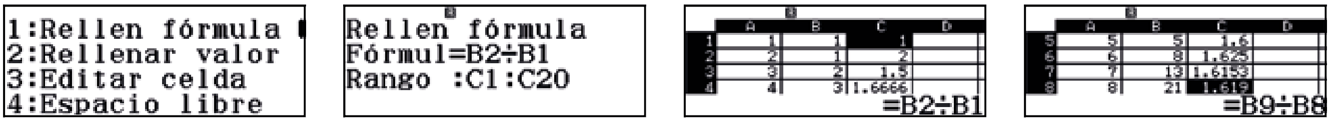
OPTN 1 ALPHA ◦,,, 1 + ALPHA ◦,,, 2





Para estudiar la sucesión de los cocientes $\frac{a_{n+1}}{a_n}$ se introduce en la celda C1 la expresión B2:B1 y se extiende al rango C1:C20:

OPTN 1 ALPHA ◦,,, 2 ÷ ALPHA ◦,,, 1



Se observa que el cociente toma el valor del número de oro:

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} \longrightarrow \Phi = \frac{1+\sqrt{5}}{2} \approx 1{,}61803398874988$$

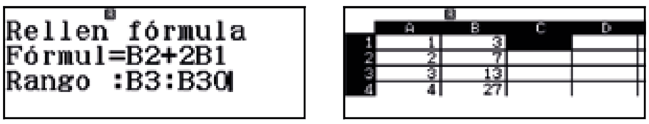
2

Respuesta abierta.

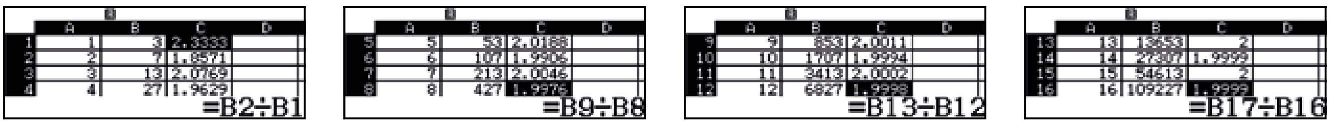
3

En este caso se introduce 3 en la celda B1 y 7 en la celda B2. Seguidamente se introduce en la celda B3 la expresión B2 + 2B1:

ALPHA ◦,,, 2 + 2 ALPHA ◦,,, 1



A continuación, se considera la sucesión de los cocientes $\frac{a_{n+1}}{a_n}$ y se comprueba que converge al número $\sigma_{Cu} \cong 2$.

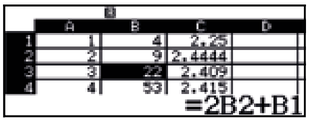


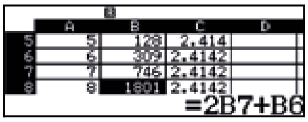
Como se observa, la sucesión tiende al número de cobre.

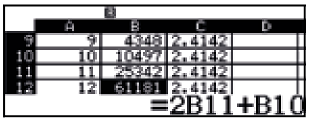
Números metálicos

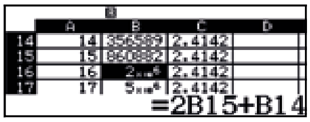
4

En este caso se obtiene:





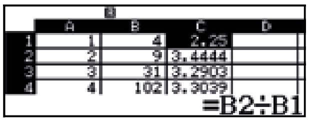


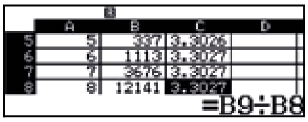


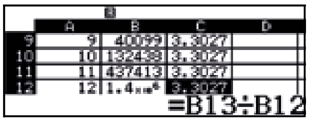
Como se observa, la sucesión de los cocientes tiende al número de plata.

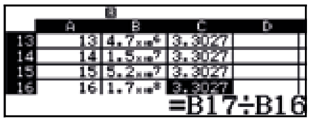
5

En este caso se obtiene:









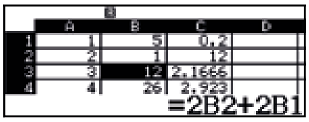
Como se observa, la sucesión de los cocientes tiende al número de bronce.

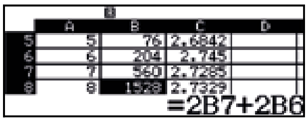
6

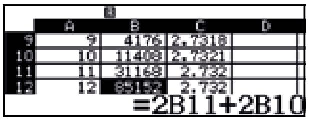
Respuesta abierta.

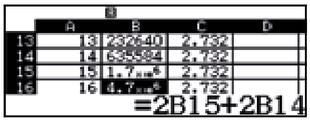
7

En este caso se obtiene:









Como se observa, la sucesión de los cocientes tiende al número de platino.

8

Respuesta abierta.

9

Respuesta abierta.

10

Respuesta abierta.

$|x_i - \bar{x}|$
$|x_i - \bar{x}| \cdot F_i$
MENU
ALPHA
SHIFT
S⇔D
Fi
$\sigma = 2{,}062056634$
$x_i \cdot F_i$
$\frac{2{,}45}{10} = \frac{10}{n}; n = \frac{100}{2{,}45} = 40{,}82$

01 | Parámetros: cálculo e interpretación
Dado Dodecaédrico

Observa los dodecaedros de la imagen. ¿Cuántas caras tienen? ¿Cómo se llaman los polígonos que forman las caras?

¿Qué es un poliedro regular? ¿Cuáles son los poliedros regulares? ¿Qué relación hay entre las aristas, las caras y los vértices?

1 Lanza un dado dodecaédrico 50 veces, anota los resultados y construye una tabla de frecuencias como la siguiente:

Puntuación	Frecuencia absoluta	Frecuencia relativa
1		
2		
3		
4		
5		
6		
7		
8		
9		
10		
11		
12		
Total		

Recuerda que la frecuencia absoluta es la cantidad de observaciones de cada dato y se suele representar mediante la letra F y un subíndice, Fi.

Para relacionar datos en dos situaciones con un número de observaciones diferentes, se introduce el concepto de frecuencia relativa, que se define como el cociente entre la frecuencia absoluta y el total de las observaciones. Se representa con fi.

2 Representa el diagrama de barras de las frecuencias absolutas y el de las frecuencias relativas. Comenta las diferencias y semejanzas entre los dos diagramas.

3 ¿Cuál es la media de las puntuaciones que se obtienen?

4 Compara la media que has obtenido con la de tus compañeros.

5 Calcula la media de todas las medias. ¿Qué resultado se obtiene?

6 Ahora, pon en común todos los datos con tu grupo. Para ello, introduce tus datos en la calculadora y compártelos con el grupo mediante la aplicación CASIO EDU+. Copia en tu cuaderno la tabla de frecuencias absolutas de toda la clase y calcula la media. ¿Qué resultado has obtenido?

7 ¿Qué relación existe entre las dos medias obtenidas? ¿Crees que eso pasa siempre?

Dado Dodecaédrico

MATERIALES
Calculadora CASIO fx-570/991 SP X II Iberia
Aplicación CASIO EDU+

NIVEL EDUCATIVO
2º de ESO

ORIENTACIONES DIDÁCTICAS Y TÉCNICAS

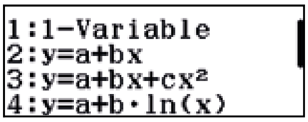
- Esta actividad se centra en la experimentación repetida de situaciones aleatorias y, en consecuencia, en la necesidad de acordar procedimientos que permitan trabajar en equipo.
- Cabe destacar que una parte importante de la actividad consiste en poner en contexto el cálculo de la media aritmética, lo que favorece su interpretación y propicia situaciones para que los alumnos descubran y enuncien sus propiedades.
- Antes de iniciar el trabajo con la calculadora hay que elegir la configuración más adecuada para realizar los cálculos.
- Para agrupar los datos de todos los estudiantes es conveniente crear una clase en la aplicación CASIO EDU+ en la que compartirlos y combinarlos.

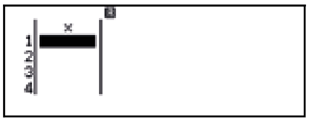
EJEMPLO DE SOLUCIÓN

En primer lugar se selecciona el modo *Estadística*, al que se accede mediante MENU 6. Seguidamente se selecciona la opción *1-variable*.

MENU 6

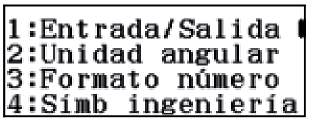
1





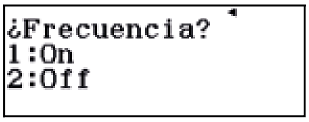
Se obtiene una tabla que solo dispone de una columna, la correspondiente a los valores que toma la variable. Para añadir una columna con las frecuencias, hay que modificar la configuración de la calculadora.

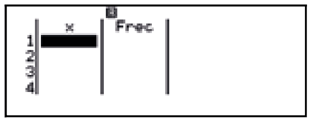
ALPHA MENU ▼



3

1





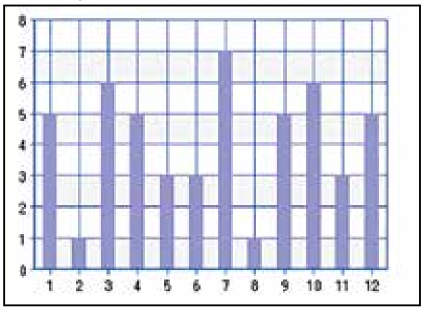
La actividad que se propone es experimental, por lo que los resultados que se obtengan serán propios de cada clase. A modo de ejemplo se recogen los datos obtenidos por cuatro grupos de estudiantes:

	Grupo 1		Grupo 2		Grupo 3		Grupo 4		Grupo clase	
x_i	F_i	f_i	F_i	f_i	F_i	f_i	F_i	f_i	F_i	f_i
1	4	0,08	4	0,08	3	0,06	5	0,10	16	0,08
2	2	0,04	1	0,02	5	0,10	1	0,02	9	0,045
3	6	0,12	4	0,08	4	0,08	6	0,12	20	0,10
4	4	0,08	0	0,00	3	0,06	5	0,10	12	0,06
5	7	0,14	2	0,04	5	0,10	3	0,06	17	0,085
6	2	0,04	8	0,16	6	0,12	3	0,06	19	0,095
7	9	0,18	6	0,12	3	0,06	7	0,14	25	0,125
8	2	0,04	7	0,14	7	0,14	1	0,02	17	0,085
9	4	0,08	5	0,10	4	0,08	5	0,10	18	0,09
10	2	0,04	3	0,06	3	0,06	6	0,12	14	0,07
11	4	0,08	6	0,12	3	0,06	3	0,06	16	0,08
12	4	0,08	4	0,08	4	0,08	5	0,10	17	0,085
Total	50	1	50	1	50	1	50	1	**200**	**1**

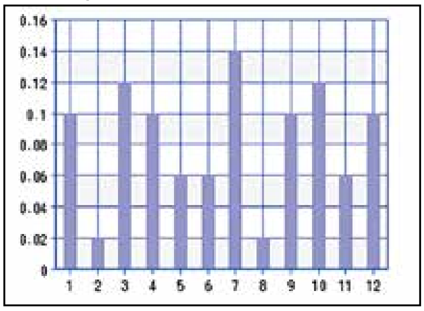
01 | Parámetros: cálculo e interpretación
Dado Dodecaédrico

En la página http://wes.casio.com/class/YmB7-K8LU-Z5RG-0oHR se pueden visualizar, entre otras, las gráficas que se muestran a continuación, que corresponden a los diagramas de barras para las frecuencias absolutas y para las frecuencias relativas del grupo 4.

Grupo 4 frecuencias absolutas



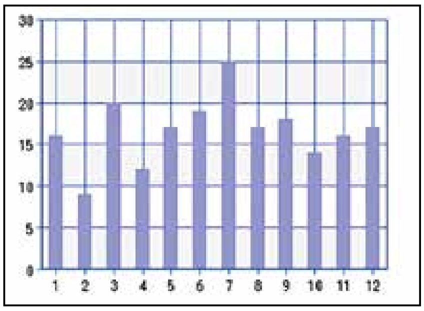
Grupo 4 frecuencias relativas



Las medias de cada grupo y la media de las medias son:

Grupo 1	Grupo 2	Grupo 3	Grupo 4	Media
6,32	7,26	6,44	6,66	6,67

La aplicación CASIO EDU⁺ permite combinar las frecuencias y dibujar el diagrama de barras que corresponde a las experiencias realizadas por todos los grupos, obteniéndose el siguiente gráfico:

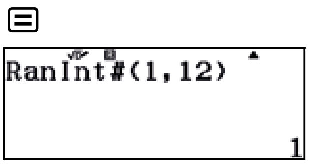


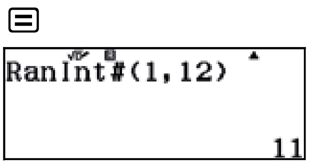
Como se observa, el gráfico está en consonancia con una media de 6,67.

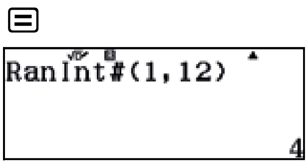
Para realizar el cálculo de la media de todos los datos, es necesario introducir en la calculadora las frecuencias agrupadas de todos los estudiantes.

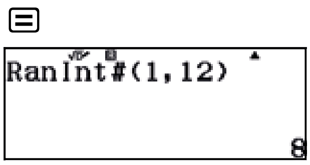
La actividad puede realizarse sin necesidad de tener que utilizar dados dodecaédricos ya que la calculadora dispone de la función *random*.

Para simular el lanzamiento de un dado de 12 caras se entra en el menú *Calcular* y se selecciona la función *RanInt#*, a la que se accede mediante ALPHA ⊡. Como lo que se pretende es conseguir números aleatorios comprendidos entre el 1 y el 12, ambos incluidos, hay que escribir:









OBSERVACIÓN 1

Es conveniente realizar más actividades para que los estudiantes se den cuenta de que esta propiedad sobre la media de medias solamente se cumple cuando el número de veces que cada estudiante ha repetido el experimento es siempre el mismo.

OBSERVACIÓN 2

Esta actividad también se puede utilizar para que los estudiantes reflexionen sobre el número de veces que hay que repetir un experimento para que los resultados experimentales se aproximen a los valores esperados teóricamente.

01 Parámetros: cálculo e interpretación
Dado Dodecaédrico

Consolidación

1 Las faltas de asistencia de 4 estudiantes en un mes han sido: 0, 3, 2, y 1. Calcula la media aritmética.

2 En una reunión hay tres bailarinas de ballet cuyo peso medio es de 48 kg y cinco jugadores de rugbi cuyo peso medio es de 85 kg. ¿Cuál es el peso medio de las personas que se encuentran en la reunión?

3 Un estudiante que realiza un trabajo temporal durante las vacaciones gana 90 € semanales durante las 8 primeras semanas y 120 € semanales durante las siguientes 4 semanas, ¿Cuál fue su sueldo medio durante las vacaciones?

02 Frecuencia relativa
Bolas de colores

En una bolsa de tela opaca se han introducido 20 bolas de tres colores diferentes (rojas, blancas y negras), pero se desconoce cuántas bolas son de cada tipo.

Una forma de averiguarlo consiste en realizar 50 extracciones con reposición (es decir, se extrae una bola de la bolsa, se anota el color y se devuelve a la bolsa).

1 Realiza el experimento que se ha indicado y anota los resultados que obtengas en la columna correspondiente a tu grupo de una tabla como la siguiente:

	G1	G2	G3	G4	G5	G6	TOTAL
Bolas rojas							
Bolas blancas							
Bolas negras							
TOTAL							

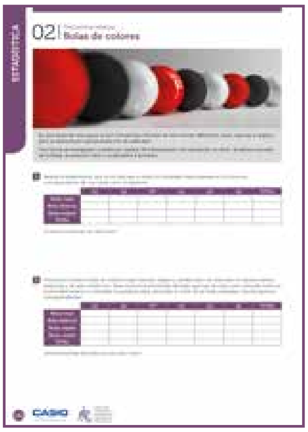
¿Cuántas bolas hay de cada color?

2 Otra bolsa contiene bolas de colores (rojas, blancas, negras y verdes), pero, en este caso, se ignora cuántas bolas hay y de qué colores son. Para conocer el porcentaje de bolas que hay de cada color, procede como en la actividad anterior y completa la siguiente tabla, anotando el color de las bolas extraídas y las frecuencias correspondientes:

	G1	G2	G3	G4	G5	G6	TOTAL
Bolas rojas							
Bolas blancas							
Bolas negras							
Bolas verdes							
TOTAL							

¿Qué porcentaje de bolas hay de cada color?

02 | Frecuencia relativa
Bolas de colores



MATERIALES
Calculadora CASIO fx-570/991 SP X II Iberia

NIVEL EDUCATIVO
2º de ESO

ORIENTACIONES DIDÁCTICAS

- Esta actividad se centra en la experimentación repetida de situaciones aleatorias y en el uso de la frecuencia relativa para obtener, en el primer caso, el número de bolas de cada color que contiene la bolsa, y, en el segundo caso, el porcentaje de bolas de cada color.

- La hoja de cálculo de las calculadoras fx-570/991 SP X II puede resultar muy útil a la hora de realizar el cálculo repetitivo de las frecuencias relativas cuando se dispone de un número elevado de datos.

EJEMPLO DE SOLUCIÓN

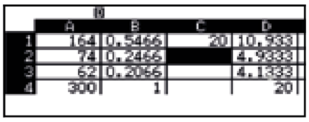
1

Un posible resultado de la experiencia se muestra en la siguiente tabla:

	G1	G2	G3	G4	G5	G6	TOTAL
Bolas rojas	25	34	28	26	23	28	164
Bolas blancas	14	9	9	15	11	16	74
Bolas negras	11	7	13	9	16	6	62
TOTAL	50	50	50	50	50	50	300

A partir de los datos se puede calcular la frecuencia relativa de cada color y, sabiendo que el número de bolas que hay en la bolsa es 20, se puede obtener el número de bolas de cada color.

	Frecuencia absoluta	Frecuencia relativa	Número de bolas
Bolas rojas	164	0,547	10,94
Bolas blancas	74	0,247	4,94
Bolas negras	62	0,206	4,12
TOTAL	300	1	20



Ajustando los resultados, se obtienen 11 bolas rojas, 5 blancas y 4 negras.

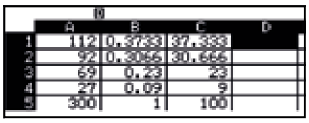
2

Un posible resultado de la experiencia se muestra en la siguiente tabla:

	G1	G2	G3	G4	G5	G6	TOTAL
Bolas rojas	18	19	19	12	20	24	112
Bolas blancas	14	14	15	19	12	18	92
Bolas negras	11	11	13	14	15	5	69
Bolas verdes	7	6	3	5	3	3	27
TOTAL	50	50	50	50	50	50	300

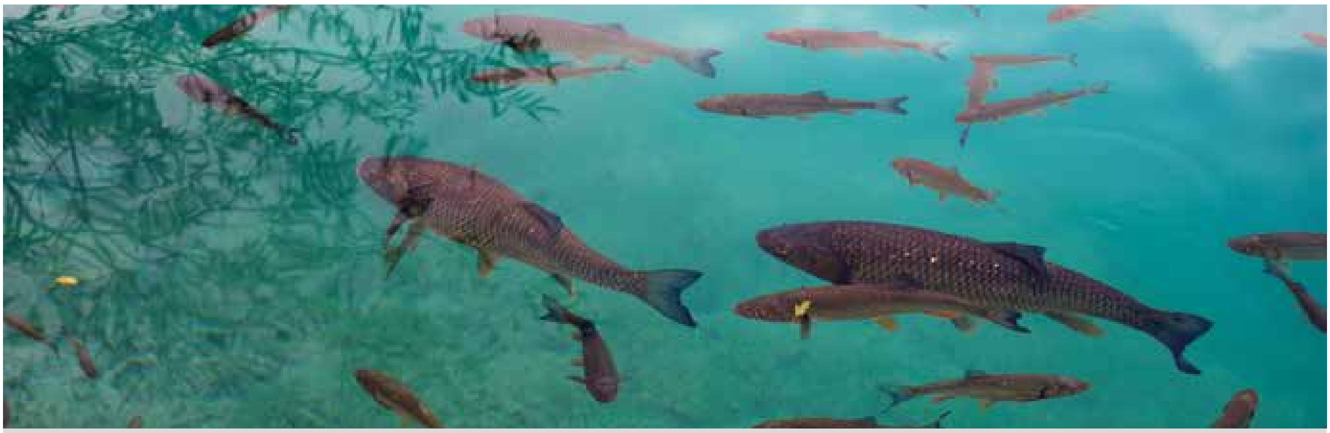
A partir de los datos se puede calcular la frecuencia relativa de cada color:

	Frecuencia absoluta	Frecuencia relativa	Porcentaje
Bolas rojas	112	0,373	37,3 %
Bolas blancas	92	0,307	30,7%
Bolas negras	69	0,230	23 %
Bolas verdes	27	0,090	9 %
TOTAL	300	1	100 %



En caso en que en la bolsa hubiera 10 bolas, 4 serían rojas; 3, blancas; 2, negras y 1, verde.

03 | Parámetros: cálculo e interpretación
¿Cuántos peces hay en el lago?



¿Cómo podrías conocer el número de peces que hay en un lago? ¿Y el número de conejos que hay en un monte? Para contestar a cuestiones de este tipo se suelen hacer estimaciones.

A continuación se desarrollará un método que permite realizar una estimación del total de una población a partir de una muestra. Para ello, conviene formar grupos de trabajo y seguir estos pasos:

- En una botella opaca se introduce un número indeterminado de bolas, todas ellas del mismo color.
- Se extraen 10 bolas y se sustituyen por otras 10 que sean de diferente color. Seguidamente se mezclan con el resto de bolas de la botella.
- A continuación cada grupo extrae 10 bolas.
- Se anota el número de bolas que son del color cambiado, se repite el experimento 20 veces y se recogen los datos en una tabla como la siguiente:

Número de bolas cambiadas	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	TOTAL
Frecuencia absoluta												20

1 A partir de la información recogida en la tabla, ¿puedes hacer una estimación del número de bolas que hay en la botella? ¿Cómo lo haríais?

2 Pon en común los datos de tu grupo. Introduce en la calculadora las frecuencias absolutas para cada número de bolas del color cambiado y compártelas con el grupo. Calcula la media a partir de los datos compartidos.

3 Ahora, abre la botella y cuenta el número de bolas que hay. Calcula el error cometido al trabajar con los datos de tu grupo y el cometido al trabajar con todos los datos.

4 ¿Crees que el método que has seguido es válido? ¿Cómo lo podrías mejorar?

03 | Parámetros: cálculo e interpretación
¿Cuántos peces hay en el lago?

MATERIALES
Calculadora CASIO fx-570/991 SP X II Iberia
Aplicación CASIO EDU+

NIVEL EDUCATIVO
2º de ESO

ORIENTACIONES DIDÁCTICAS Y TÉCNICAS

- Esta actividad se centra en la experimentación repetida de situaciones aleatorias y, en consecuencia, sirve para ilustrar la necesidad de acordar procedimientos que permitan trabajar en equipo.
- La situación planteada obliga a buscar un método que permita su simulación. El uso de botellas opacas nos parece una herramienta apropiada y eficaz para tal fin.
- Esta actividad permite hacer un uso de la media que es poco frecuente en los problemas escolares. Para que el valor de la media permita realizar una buena estimación es necesario que el número de simulaciones sea lo suficientemente grande.
- Antes de iniciar el trabajo con la calculadora hay que elegir la configuración con la que se realizarán los cálculos. En este caso, se elige el modo *Estadística*, opción *1-variable* (MENU 6 1).
- Para activar las frecuencias hay que acceder a la configuración según secuencia la secuencia, SHIFT MENU ▼ 3 1.
- El diagrama de barras se obtiene generando un código *QR* (SHIFT OPTN) desde la tabla de frecuencias.
- Para comparar los diagramas de barras y de caja de cada grupo es conveniente crear una clase en la aplicación CASIO EDU+.
- La aplicación CASIO EDU+ favorece el intercambio de datos experimentales a la vez que ayuda a visualizar gráficos a partir del agrupamiento de los datos de todo el grupo.

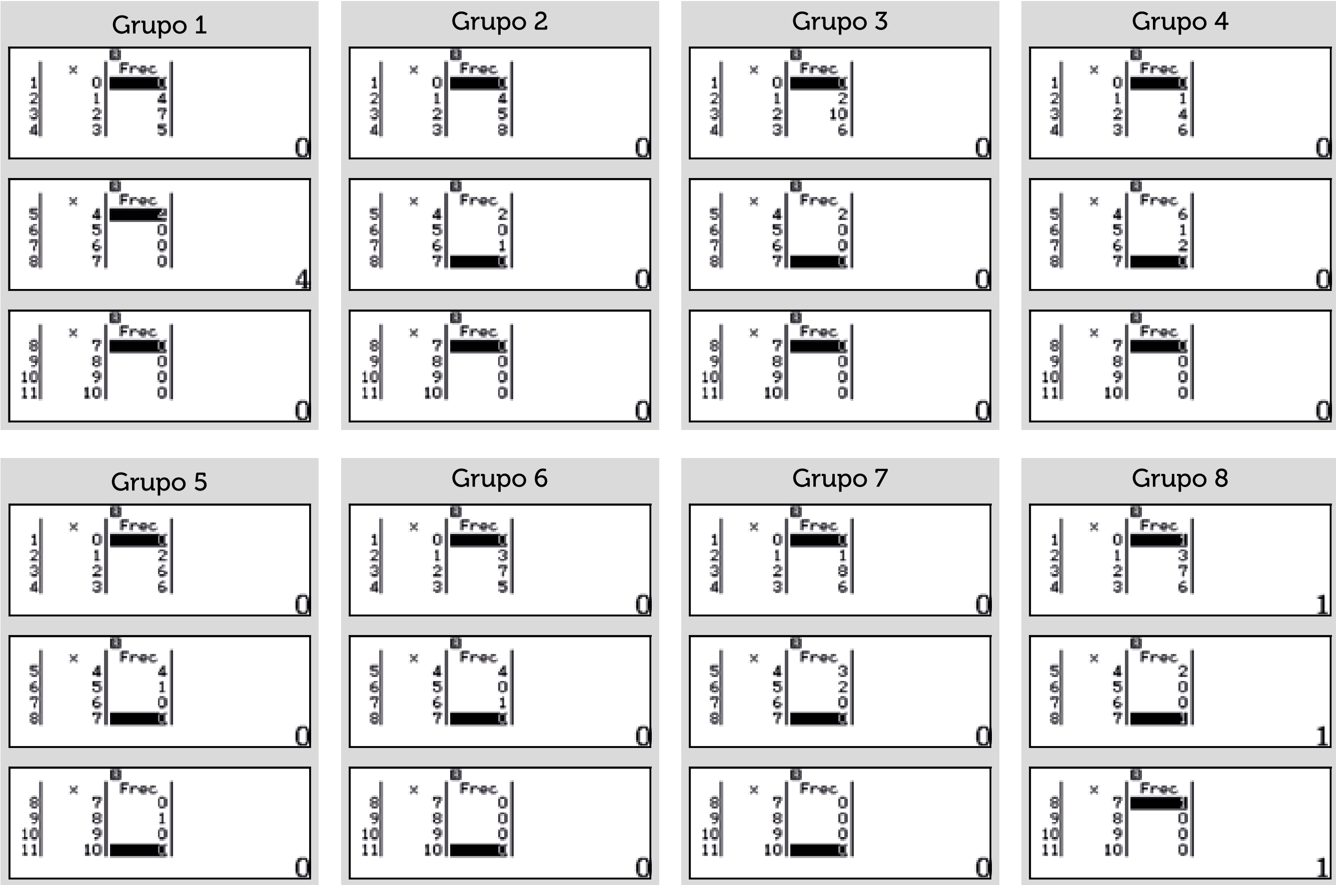
EJEMPLO DE SOLUCIÓN

La tabla adjunta muestra los datos reales que se obtuvieron en una clase de 2º de ESO distribuida en ocho grupos:

	Número de bolas del color cambiado											
F_i	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	TOTAL
Grupo 1	0	4	7	5	4	0	0	0	0	0	0	20
Grupo 2	0	4	5	8	2	0	1	0	0	0	0	20
Grupo 3	0	2	10	6	2	0	0	0	0	0	0	20
Grupo 4	0	1	4	6	6	1	2	0	0	0	0	20
Grupo 5	0	2	6	6	4	1	0	0	1	0	0	20
Grupo 6	0	3	7	5	4	0	1	0	0	0	0	20
Grupo 7	0	1	8	6	3	2	0	0	0	0	0	20
Grupo 8	1	3	7	6	2	0	0	1	0	0	0	20
TOTAL	1	20	54	48	27	4	4	1	1	0	0	160

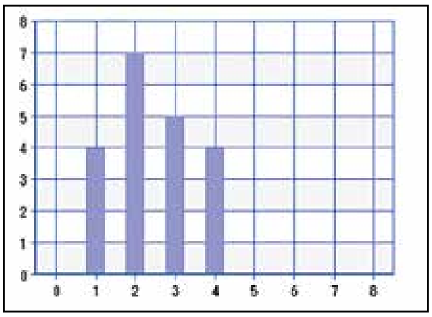
A partir de estos datos, cada grupo elaboró su propia tabla de frecuencias.

¿Cuántos peces hay en el lago?



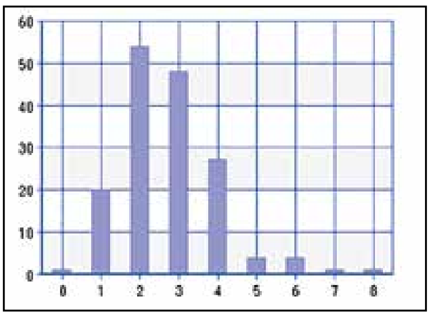
A partir de las frecuencias de cada grupo se representaron los diagramas correspondientes. A continuación se muestra, a modo de ejemplo el diagrama de barras correspondiente al primer grupo.

Grupo 1



Seguidamente se combinaron todos los diagramas en la aplicación CASIO EDU+ y, a partir, del diagrama resultante se hizo el recuento de frecuencias para todo el grupo.

Total



03 | Parámetros: cálculo e interpretación
¿Cuántos peces hay en el lago?

La media de cada grupo y la media de toda la clase se recogen en la siguiente tabla:

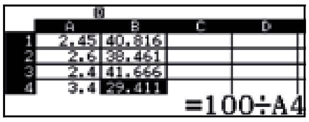
	Grupo 1	Grupo 2	Grupo 3	Grupo 4	Grupo 5	Grupo 6	Grupo 7	Grupo 8	TOTAL
Media	2,45	2,6	2,4	3,4	3,05	2,7	2,85	2,5	2,74

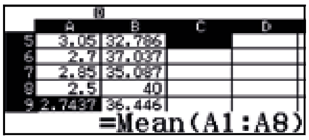
A partir de la media se obtiene, por proporcionalidad, el número de bolas estimadas:

$$\text{Grupo 1: } \frac{2{,}45}{10} = \frac{10}{n}; n = \frac{100}{2{,}45} = 40{,}82$$

$$\text{Total: } \frac{2{,}74}{10} = \frac{10}{n}; n = \frac{100}{2{,}74} = 36{,}5$$

	Grupo 1	Grupo 2	Grupo 3	Grupo 4	Grupo 5	Grupo 6	Grupo 7	Grupo 8	TOTAL
N. bolas	40,82	38,46	41,67	29,41	32,79	37,04	35,09	40	36,50

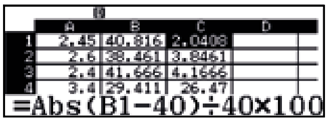


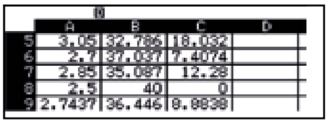


El número de bolas estimado es 36,5 y el número de bolas real es 40.

El error cometido en cada caso es:

	Grupo 1	Grupo 2	Grupo 3	Grupo 4	Grupo 5	Grupo 6	Grupo 7	Grupo 8	TOTAL
Error	2,05 %	3,85 %	4,17 %	26,47 %	18,03 %	7,41 %	12,82 %	0 %	8,76 %





Es esta una buena ocasión para que los estudiantes se den cuenta de la necesidad de realizar muchas veces el experimento, para que el error cometido sea el menor posible y, por tanto, la estimación sea fiable. Ahora bien, en muestras pequeñas puede suceder lo que ha ocurrido en esta ocasión: los grupos 1 y 8 obtienen una buena estimación de la población, en cambio el error cometido al realizar la estimación con todos los datos es considerable.

Aprovechar estas situaciones para reflexionar con los estudiantes contribuye a que estos mejoren su aprendizaje de las matemáticas.

Todas las gráficas se pueden visualizar en el siguiente enlace:
http://wes.casio.com/class/7TmP-BgHi-ctYA-g5C1

04 | Parámetros: cálculo e interpretación
El paso humano

¿Cómo podrías determinar el número de días en los que el cielo ha estado nublado durante los últimos tres meses? ¿Y el número de días que ha llovido?

La lluvia es un fenómeno bastante evidente pero, ¿puedes establecer, sin dejar lugar a dudas, un criterio que permita determinar si un día está nublado o no? ¿Crees que es importante la hora a la que se realiza la observación? ¿Y el lugar?

Como ves, una pregunta puede tener gran variedad de respuestas, todas ellas correctas, y sin embargo, las respuestas pueden no satisfacer el objetivo de la pregunta. Por esta razón, conviene formular preguntas que no sean ambiguas y dejar claro cuál es el abanico de respuestas a las que nos queremos restringir. Una vez que se tiene claro lo que se quiere estudiar, se han de recoger los correspondientes datos. Pero no se trata de medir sin más, el proceso de medición requiere de una buena planificación que permita obtener resultados fieles a la realidad, estableciendo perfectamente las condiciones de la medida, así como los casos que se tendrán en cuenta y los que no.

En esta actividad te proponemos que des respuesta a una pregunta de sencilla formulación: «¿Cuál es la longitud del paso humano?». Para responder a esta cuestión, mide la distancia entre dos puntos del pasillo de tu instituto, por ejemplo, 20 m y cuenta el número de pasos que necesitan tus compañeros para recorrer el trayecto que va desde el punto inicial hasta el punto final. Recoge los datos en una tabla como la que se muestra a continuación:

Nombre	Número de pasos
Total	

1. ¿Crees que los resultados varían si las personas saben que son observadas? ¿Por qué?

2. ¿Crees que los datos que has obtenido representan el paso de todas las personas? ¿Por qué?

3. ¿Has hecho distinciones entre chicos y chicas? ¿Crees que es necesario?

4. ¿Cuál es el significado de la media de estos datos?

5. ¿Qué significado tiene el número que se obtiene al dividir la distancia total recorrida entre la longitud media de los pasos?

6. Calcula la media y los cuartiles de la longitud de los pasos de tus compañeros de clase, tanto para las chicas como para los chicos, y construye sus respectivos diagramas de caja. ¿Qué observas?

7. ¿Cuál es la longitud media del paso de las chicas? ¿Y de los chicos?

CASIO División Educativa
Federación Española de Sociedades de Profesores de Matemáticas

El paso humano

MATERIALES

Calculadora CASIO fx-570/991 SP X II o superior
Aplicación CASIO EDU+

NIVEL EDUCATIVO

2º de ESO

ORIENTACIONES DIDÁCTICAS Y TÉCNICAS

- Esta actividad se centra en la experimentación repetida de situaciones aleatorias. Planificar y realizar la toma de datos por parte del alumnado es una tarea esencial en la iniciación a la estadística.
- El uso de la calculadora para realizar los cálculos permite centrar el interés, por una parte, en la interpretación de las diferencias que se obtienen si se considera la media de todos los valores y se compara con la media obtenida a partir de los datos de los chicos y de las chicas por separado. Aunque hay que tener en cuenta que cuando se realiza esta actividad en un grupo natural de secundaria, se corre el riesgo de que los datos no sean los esperados, pues la muestra no suele tener un tamaño suficiente.
- El cálculo de los cuartiles y el diagrama de cajas y bigotes permiten visualizar cuándo dos poblaciones son distintas. Según diversos estudios estadísticos contrastados, la longitud media del paso para las mujeres adultas es de 67 cm, y la de los hombres, de 76,2 cm.
- Antes de iniciar el trabajo con la calculadora hay que configurarla. En este caso, se elige el modo *Estadística*, opción *1-variable*, y se desactivan las frecuencias de la tabla estadística:

SHIFT MENU

```
1:Entrada/Salida
2:Unidad angular
3:Formato número
4:Símb ingeniería
```

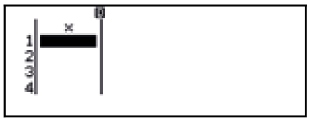
▼ 3

```
1:Result fracción
2:Complejos
3:Estadística
4:Hoja de cálculo
```

2

```
¿Frecuencia?
1:On
2:Off
```

=



- Para comparar los diagramas de caja y bigotes de los chicos, las chicas y todos los alumnos, conviene crear una clase en la aplicación CASIO EDU+ en la que compartirlos. Tras introducir los datos en la calculadora, para obtener los parámetros estadísticos basta con presionar la tecla OPTN y seleccionar la opción 3: *Cálc 1-variables*. Si lo que se desea es visualizar el diagrama de caja y bigotes hay que generar un código *QR* y abrirlo en la aplicación.

EJEMPLO DE SOLUCIÓN

1

Las personas modificamos nuestro comportamiento al sentirnos observadas.

2

Los datos obtenidos no representan a todas las personas por diversas razones: la muestra no es lo suficientemente amplia y además está sesgada, ya que los datos se han obtenido para un grupo de adolescentes.

3

La muestra pertenece a dos poblaciones distintas (ver actividad 6).

4

Representa el número medio de pasos que necesitaron los estudiantes para recorrer 20 m caminando a paso normal.

5

Al dividir la distancia total recorrida entre la media del número de pasos se obtiene la longitud del paso medio. En el ejemplo, el paso medio es 20:29,1= 0,687 m/paso.

El paso humano

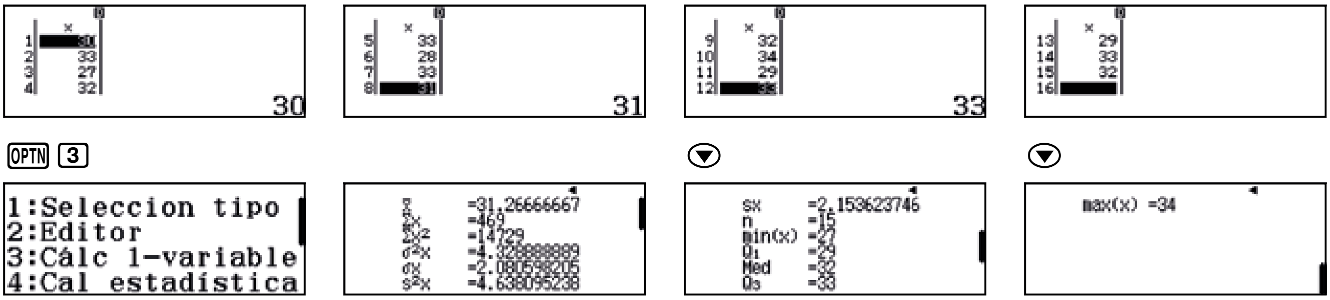
6

Los datos que se muestran a continuación se recogieron en el curso 2015-2016 en una clase de 2º de ESO formada 29 alumnos, de los cuales 15 eran chicas y 14 eran chicos. Se midieron los pasos que necesitaron para recorrer una longitud de 20 m en un pasillo del instituto y se recogieron en la siguiente tabla:

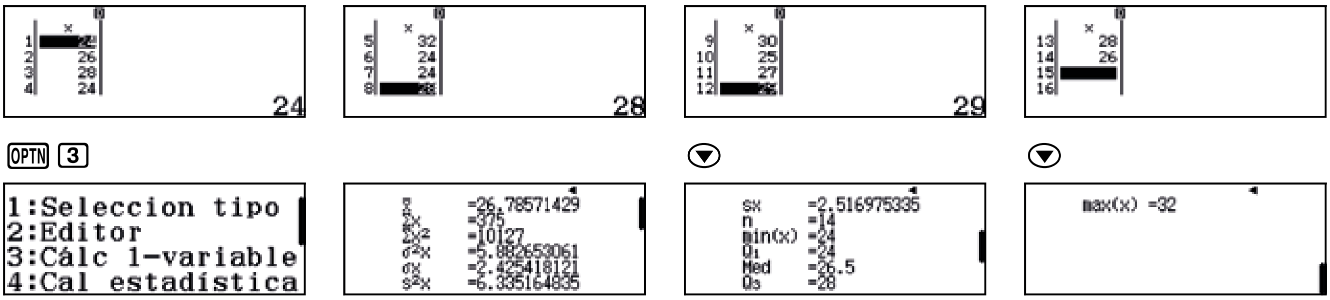
																TOTAL
Chicas	30	33	27	32	33	28	33	31	32	34	29	33	29	33	32	**469**
Chicos	24	26	28	24	32	24	24	28	30	25	27	29	28	26		**375**
															TOTAL	**844**

Para calcular la media y los cuartiles se introducen separadamente los datos de las chicas y los chicos y se determinan los parámetros estadísticos correspondientes:

Chicas:

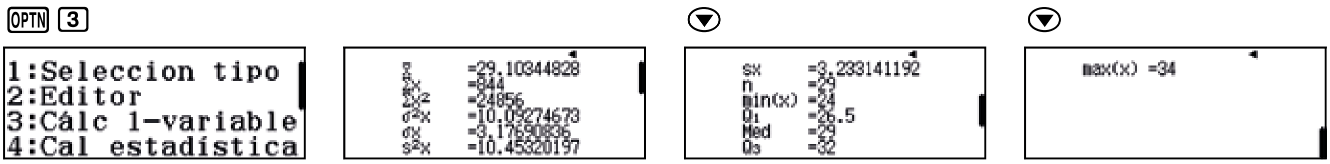


Chicos:



7

La media del conjunto de alumnos es:



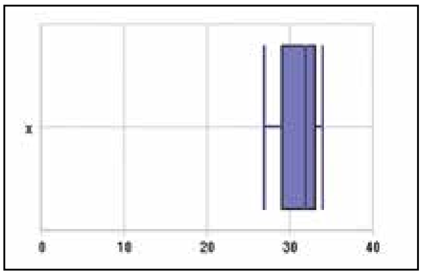
Se obtiene una media de 29 pasos (29,10). Valor que no coincide con la media de los chicos (26,79 pasos) ni con la media de las chicas (31,27 pasos), ya que son poblaciones de distinto tamaño.

El valor de los cuartiles y los diagramas de caja se obtienen de manera sencilla con la calculadora, de manera se puede dedicar más tiempo a interpretar los resultados.

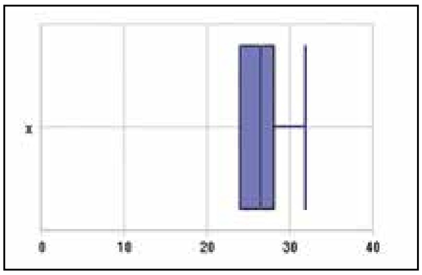
Para agilizar la actividad, se puede distribuir el trabajo de introducción de datos en la calculadora por grupos y compartirlos en la aplicación CASIO EDU+. Se obtienen, entonces los siguientes diagramas de caja y bigotes:

El paso humano

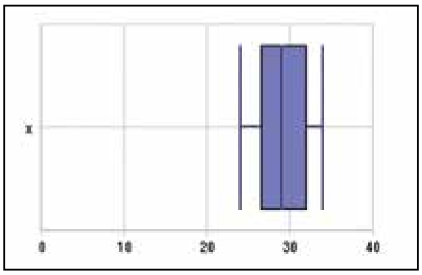
Chicas



Chicos



Chicas y chicos



http://wes.casio.com/class/3L37-MD6H-XeyZ-uCyM

La comparación de los tres diagramas permite afirmar que la muestra estudiada está formada por dos poblaciones distintas. Se puede corroborar mediante los valores de los siguientes parámetros.

	Min.	Q_1	*Me*	Q_3	*Máx.*	Media pasos	Longitud media pasos
Chicas	27	29	32	33	34	31,27	0,64
Chicos	24	26	28	24	32	26,79	0,747
Chicas y chicos	24	26,5	29	32	34	29,10	0,687

La longitud media del paso para las chicas es de 20 : 31,27 = 0,64 m/paso, y para los chicos, de 0,747 m/paso.

Ampliación

Existe una forma de estimar la longitud del paso en función de la estatura. Para las mujeres, se estima que el producto de la altura por 0,413 proporciona la longitud de su paso. En el caso de los hombres, la longitud del paso se obtiene de multiplicar su altura por 0,415.

1. ¿Cuál es la longitud estimada del paso de una mujer que mide 162 cm? ¿Y del paso de un hombre de su misma estatura?

2. ¿Cuál es la altura estimada de una mujer cuyo paso es de 65 cm?

3. ¿Cuál es la altura estimada de un hombre cuyo paso es de 78 cm?

4. ¿Cuál es la altura estimada de una chica que completa un recorrido de 20 m dando 29 pasos? ¿Y la de un chico que completa esa misma distancia dando 25 pasos?

5. ¿Cuál es la diferencia de alturas estimadas entre un chico y una chica que han completado un recorrido de 20 m dando 29 pasos?

6. ¿Cuál es la altura media estimada de las chicas? ¿Y la de los chicos?

7. ¿Puedes calcular la altura media estimada de todos los alumnos a partir de los datos recogidos, sin hacer distinciones entre chicos y chicas? ¿Por qué?

05 | Parámetros: cálculo e interpretación
Un premio en un tapón

Una marca de refrescos ha incorporado en sus tapones fotografías de 9 animales. La compañía regalará un viaje a aquellos consumidores que consigan reunir las 9 fotografias. ¿Cómo se puede averiguar el número de refrescos que hay que consumir de media para recibir el premio?

Para responder a esta cuestión es necesario realizar una estimación. Una manera de hacerlo es realizar una simulación de la situación generando números aleatorios con la calculadora. Existen dos funciones que permiten hacerlo: la función *Ran#* y la función *RanInt#* (que utilizaremos en esta actividad).

1 Genera números aleatorios con tu calculadora hasta que obtengas los 9 primeros números naturales (1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, y 9). Anota cuántos números has tenido que generar para conseguirlo en una tabla como la que se muestra a continuación. Repite la simulación 10 veces siguiendo el ejemplo.

	Resultado									
Simulación	1	2	3	4	5	6	7	8	9	Total (Nº de refrescos)
1ª	|	|||	|||	||	||||	|	||	|	|	18
2ª										
3ª										
4ª										
5ª										
6ª										
7ª										
8ª										
9ª										
10ª										

2 Halla, a partir de tus 10 simulaciones, la media del número de refrescos que hay que consumir para obtener los 9 animales. ¿Cuál es el significado de esa media?

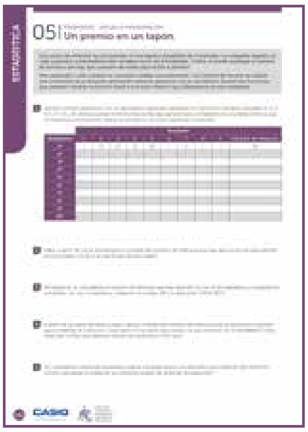
3 Introduce en tu calculadora el número de refrescos que has obtenido en tus 10 simulaciones y comparte tus resultados con tus compañeros, utilizando el código *QR* y la aplicación CASIO EDU+.

4 A partir de los datos de toda la clase, calcula la media del número de refrescos que es necesario consumir para completar la colección. ¿Qué relación hay entre esta media y la que obtuviste en la actividad 2? ¿Qué observas? ¿Crees que siempre sucede ese fenómeno? ¿Por qué?

5 Un compañero solamente ha podido realizar 9 simulaciones y ha obtenido una media de 29,5 refrescos. ¿Cómo calcularías la media de los refrescos a partir de todas las simulaciones?

05 | Parámetros: cálculo e interpretación

Un premio en un tapón



MATERIALES

Calculadora CASIO fx-570/991 SP X II Iberia
Aplicación CASIO EDU+

NIVEL EDUCATIVO

2º de ESO

ORIENTACIONES DIDÁCTICAS Y TÉCNICAS

- Esta actividad se centra en la experimentación repetida de situaciones aleatorias y, en consecuencia, en la necesidad de acordar procedimientos que permitan trabajar en equipo.
- La situación planteada obliga a buscar un método que permita su simulación. La generación de números aleatorios con la calculadora es un método de simulación rápido y eficaz.

- Para realizar es actividad hay que utilizar el menú *Estadística*, opción *1-variable* (MENU 6 1).
- Para agrupar los datos de todos los estudiantes, es conveniente crear una clase en la aplicación CASIO EDU+, en la que compartir y combinarlos dichos datos.
- Para generar números aleatorios entre el 1 y el 9 se hará uso de la función *Ranint*, cuya sintaxis es RanInt#(1,9).

ALPHA · 1 SHIFT) 9) =

EJEMPLO DE SOLUCIÓN

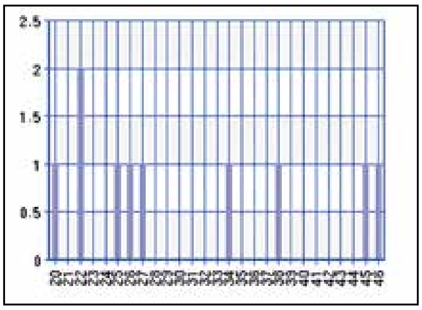
Dado el carácter experimental de esta actividad, la solución que se presenta recoge, a modo de ejemplo, los datos reales que obtuvieron 3 alumnos de 2º de ESO.

	Alumno A	Alumno B	Alumno C	
Simulaciónes	N. refrescos	N. refrescos	N. refrescos	TOTAL
1ª	20	35	28	
2ª	26	13	41	
3ª	34	30	35	
4ª	46	17	14	
5ª	25	36	20	
6ª	22	26	25	
7ª	45	27	34	
8ª	27	17	44	
9ª	38	12	18	
10ª	22	28	20	
TOTAL	305	241	279	825
MEDIA	30,5	24,1	27,9	27,5

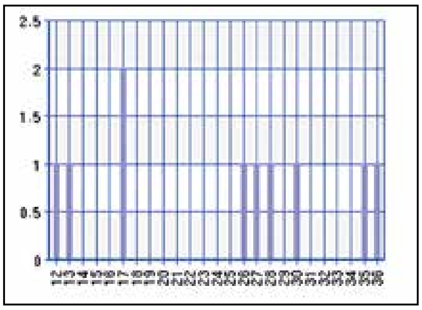
En la página http://wes.casio.com/class/wvrR-s35N5M-fa1B-eFI7 se pueden visualizar las gráficas que se muestran a continuación. Hay que tener en cuenta que para los diagramas de barras es necesario seleccionar en las preferencias de la aplicación las opciones *HStep: 1, Display: Discrete* y *Draw.*

05 | Parámetros: cálculo e interpretación
Un premio en un tapón

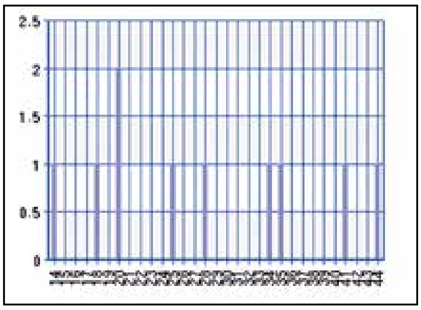
Alumno A



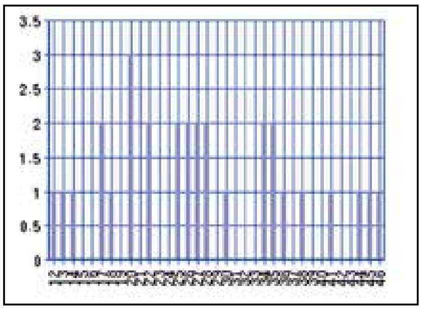
Alumno B



Alumno C



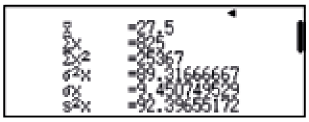
Al combinar estos diagramas se obtiene el diagrama de barras correspondiente a todos los datos obtenidos.

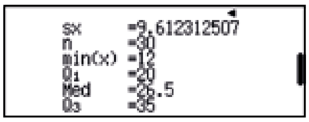


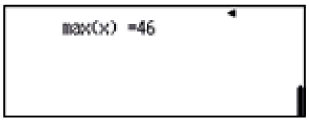
A partir de este diagrama se puede elaborar la tabla de frecuencias de todos los datos y obtener la media de los valores.

x_i	12	13	14	17	18	20	22	25	26	27	28	30	34	35	36	38	41	44	45	46
F_i	1	1	1	2	1	3	2	2	2	2	2	1	2	2	1	1	1	1	1	1

Los resultados que se obtienen con la calculadora son:



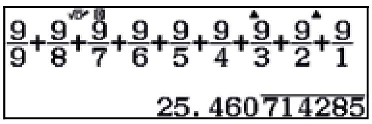




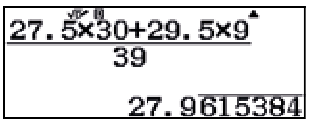
Se puede comparar la media obtenida experimentalmente, 27,5, con el valor esperado teóricamente:

Al comprar el primer refresco, dado que aún no disponemos de ningún animal, tenemos una probabilidad de éxito de 9/9 = 1. Al comprar el segundo refresco, como ya disponemos de un animal, la probabilidad de obtener un animal distinto es de 8/9. Una vez disponemos de 2 animales distintos, la probabilidad de que el tercer refresco contenga otro animal diferente a los dos primeros es de 7/9. Y así sucesivamente.

Supongamos, por ejemplo, que disponemos de 6 animales diferentes. En ese caso, la probabilidad de que en el nuevo refresco venga otro animal distinto es de 3/9 = 1/3. Por tanto, es esperable que tengamos que comprar 3 = 9/3 (el inverso de 3/9) refrescos para garantizar el éxito. Razonando de forma semejante para los otros casos se tiene que el número de refrescos que hay que comprar es, teóricamente:



En el caso en que un compañero haya obtenido una media de 29,5 refrescos con 9 simulaciones, la media total se calcula como:



05 | Parámetros: cálculo e interpretación
Un premio en un tapón

Ampliación

1 En un ascensor hay diez personas, cuatro mujeres y seis hombres. El peso medio de las mujeres es de 60 kg y el de los hombres es de 90 kg. ¿Cuál es el peso medio de las diez personas que se encuentran en el ascensor?

2 Para celebrar el día *verde* el alumnado de una clase llevó tierra para llenar macetas en las que plantar semillas. Luis fue el que más tierra llevó: 2 kg. Más tarde decidieron repartirse la tierra de manera que todos tuvieran la misma cantidad. Después del reparto cada uno recibió 3 kg. ¿Es posible este resultado? Justifica tu respuesta.

3 Cuando Juan fue a solicitar trabajo le dijeron que se cobraba una media de 2000 €. Sin embargo, en su primera nómina cobró 1.000 €. A la vista de esta información, ¿es razonable el sueldo que ha recibido?

4 Un aeroplano vuela alrededor de un cuadrado cuyo lado mide 100 km de longitud. El primer lado lo sobrevuela a 100 km/h; el segundo, a 200 km/h; el tercero, a 300 km/h, y el cuarto, a 400 km/h. ¿Cuál es la velocidad media del avión en su vuelo alrededor del cuadrado?

06 | Parámetros: cálculo e interpretación
Notas en matemáticas

A continuación se muestran las notas que han obtenido algunos alumnos de 4 clases de 2º de ESO en el área de Matemáticas:

2º A	x	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
	F_i	0	0	0	0	10	15	5	1	0	0	0

2º B	x	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
	F_i	0	1	3	5	8	8	7	2	2	1	1

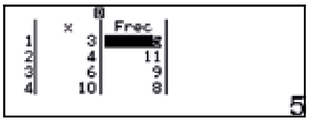
2º C	x	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
	F_i	2	3	3	4	3	2	3	3	1	4	2

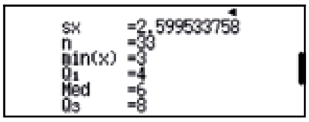
2º D	x	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
	F_i	7	6	3	0	1	2	2	2	1	5	7

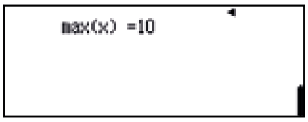
1 Calcula la media, la mediana y la moda de cada clase. ¿Proporciona la media un conocimiento suficiente sobre el rendimiento en matemáticas de las 4 clases? ¿Por qué?

2 Construye un diagrama de barras para cada clase. ¿Qué puedes decir sobre las notas de cada clase?

3 Hemos introducido una serie de notas en la calculadora y hemos obtenido los siguientes parámetros estadísticos.



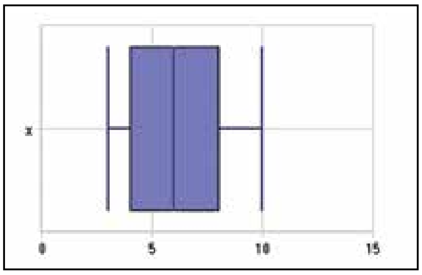




a) ¿Qué significado crees que tienen n, $min\ (x)$ y $max\ (x)$?

b) Observa ahora los valores de los cuartiles (Q_1, Q_2 = Med y Q_3). ¿Cómo crees que se han calculado? ¿Qué crees que significan?

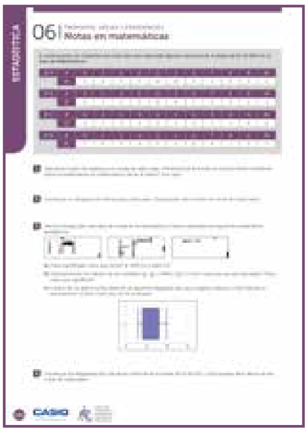
c) A partir de los datos se ha obtenido el siguiente diagrama de caja y bigotes adjunto. ¿Qué valores se representan? ¿Cómo crees que se ha realizado?



4 Construye los diagramas de caja de las notas de las 4 clases de 2º de ESO. ¿Qué puedes decir ahora de las notas de cada clase?

CASIO División Educativa
Federación Española de Sociedades de Profesores de Matemáticas

Notas en matemáticas



MATERIALES

Calculadora CASIO fx-570/991 SP X II Iberia
Aplicación CASIO EDU+

NIVEL EDUCATIVO

2º de ESO

ORIENTACIONES DIDÁCTICAS Y TÉCNICAS

- Para que esta actividad se pueda realizar con agilidad es conveniente repartir a los alumnos en grupos.
- La mediana permite conocer el dato situado en el medio de todos los datos. En los casos en los que la media queda desvirtuada porque los datos son extremos, la mediana resulta más representativa.
- Cuando, además, las medianas son similares, para representar la situación se puede recurrir al cálculo de los cuartiles y a su representación en diagramas de cajas y bigotes.
- Los diagramas de caja y bigotes completan la información que se obtiene con el diagrama de barras y constituyen presentaciones visuales que describen simultáneamente diversas características importantes, tales como la posición, la dispersión y la simetría.
- Para poder relacionar datos de dos situaciones cuando el número de observaciones es distinto, se utiliza la frecuencia relativa; ahora bien, aunque el número de alumnos en cada clase no sea el mismo, a partir del diagrama de barras de las frecuencias absolutas es posible hacerse una idea de cómo es el rendimiento en Matemáticas de cada clase.
- Antes de iniciar el trabajo con la calculadora hay que elegir la configuración con la que se realizarán los cálculos. En este caso, se elige el modo *Estadística*, opción *1-variable* (MENU 6 1). Las frecuencias de la tabla de valores se activan accediendo a la configuración, según la siguiente secuencia:

SHIFT MENU ▼

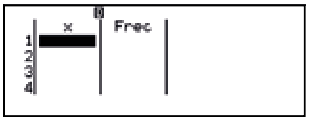
1:Entrada/Salida
2:Unidad angular
3:Formato número
4:Símb ingeniería

3

1:Result fracción
2:Complejos
3:Estadística
4:Hoja de cálculo

1

¿Frecuencia?
1:On
2:Off



- Para comparar los gráficos (diagramas de barras y de caja y bigotes) de cada clase es conveniente crear una clase en la aplicación CASIO EDU+ en la que compartirlos. El diagrama de barras se obtiene generando un código *QR* desde la tabla de frecuencias. Para obtener el diagrama de caja y bigotes, hay que pulsar la tecla OPTN y seleccionar la opción 3: *Cálc 1-variables*. Seguidamente hay que generar el código *QR* (SHIFT OPTN).

EJEMPLO DE SOLUCIÓN

1

Para calcular la media, la mediana y los cuartiles se introducen los datos correspondientes a cada clase en la calculadora y, seguidamente, se determinan los parámetros estadísticos mediante la secuencia OPTN 3.

	2º A	2º B	2º C	2º D
$\bar{x}$	=4.903225806	=4.868421053	=4.866666667	=4.861111111
Σx	=152	=185	=146	=175
Σx^2	=764	=1045	=992	=1423
$\sigma^2 x$	=0.6035379813	=3.798476454	=9.382222222	=15.89737654
σx	=0.7768770696	=1.948968049	=3.063041335	=3.987151432
$s^2 x$	=0.623655914	=3.90113798	=9.705747126	=16.3515873
sx	=0.7897188829	=1.975129864	=3.115404809	=4.043709597
n	=31	=38	=30	=36
min(x)	=4	=1	=0	=0
Q_1	=4	=4	=2	=1
Med	=5	=5	=4.5	=5
Q_3	=5	=6	=7	=9
max(x)	=7	=10	=10	=10

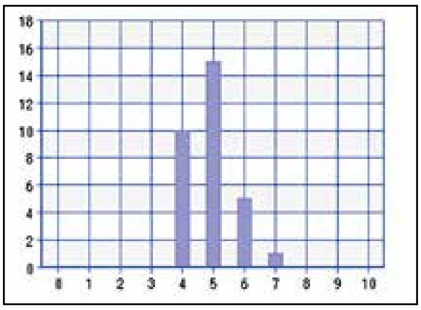
06 | Parámetros: cálculo e interpretación
Notas en matemáticas

En la siguiente tabla se resumen los parámetros de interés para cada clase:

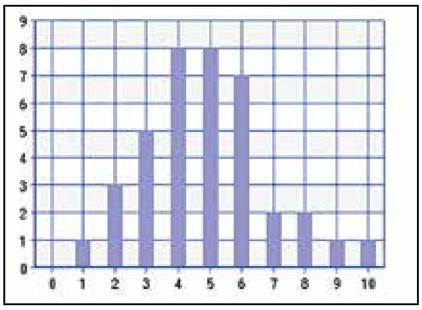
	2º A	2º B	2º C	2º D
Media	4,9	4,87	4,87	4,86
Mediana	5	5	4,5	5
Moda	5	4 y 5	4 y 9	0 y 10

2

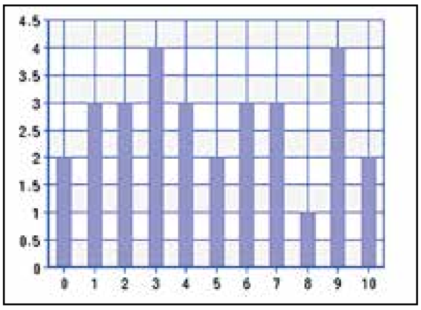
Para analizar mejor el comportamiento de cada clase, se pueden representar los diagramas de barras correspondientes. Para ello, hay que crear los códigos *QR* desde las tablas de frecuencias correspondientes.



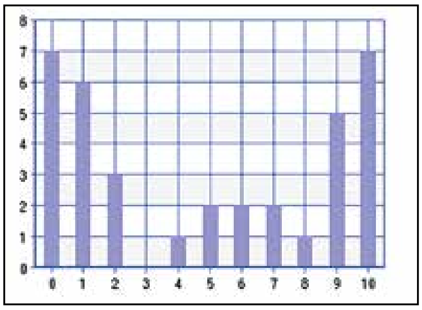
En 2º A los datos están muy agrupados alrededor de la media, lo que significa que los alumnos obtienen resultados parecidos. Los resultados no son ni muy bajos ni muy altos.



En 2º B los datos también están agrupados alrededor de la media, pero no tanto como en 2º A. Hay alumnos con notas muy bajas y otros con notas muy altas.



En 2º C no se observa ninguna agrupación. Las notas se distribuyen por todos los valores posibles.



En 2º D los valores se acumulan en los extremos. Hay muchos alumnos con notas bajas y otros tantos con notas altas.

http://wes.casio.com/class/Gzob-Gu14-O5AB-Lprd

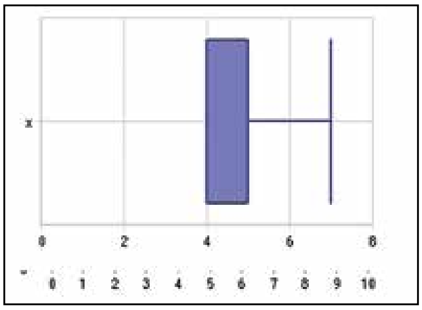
3

Así como la mediana separa los datos en dos mitades, los cuartiles las separan en cuatro partes. El primer cuartil (Q_1), separa los datos dejando la cuarta parte de los datos por debajo y tres cuartas partes por arriba; el segundo cuartil (Q_2, es decir, la mediana), los separa dejando dos cuartos por debajo y dos cuartos por arriba y el tercer cuartil (Q_3), separa los datos dejando las tres cuartas partes de los datos por debajo y una cuarta parte por arriba.

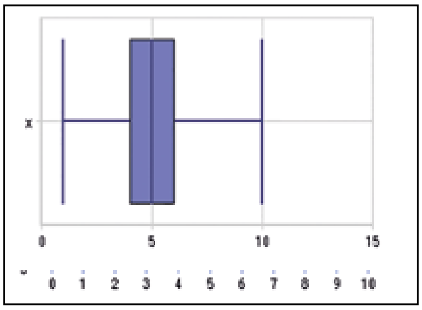
4

Los diagramas de caja y bigotes completan la información que se ha obtenido con el diagrama de barras. La posición de la mediana y su menor rango intercuartílico indican que el grupo A tiene notas más regulares.

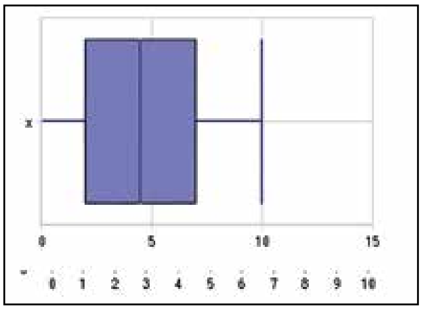
2º A



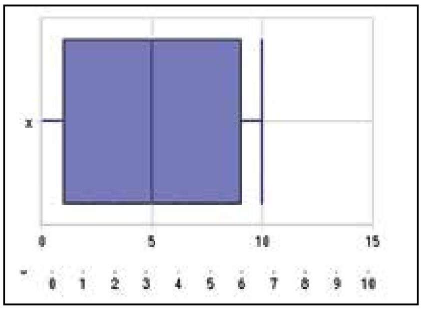
2º B



2º C



2º D



Ampliación

1 Hemos estado observando las marcas de dos saltadores de longitud y hemos registrado los siguientes resultados:

Deportista A	7,90; 8,05; 7,92; 7,93; 7,80; 7,95; 7,96; 7,98; 7,99; 7,91; 7,85; 7,93; 7,91; 7,99; 7,96; 7,95; 7,97; 7,90; 7,92; 7,94; 7,98; 8,00; 7,94; 8,10; 7,97; 8,00
Deportista B	7,95; 7,92; 7,93; 7,95; 7,95; 7,96; 7,97; 7,93; 7,95; 7,97; 7,96; 7,95; 7,95; 7,94; 7,95; 7,94; 7,98; 7,96; 7,94; 7,97; 7,95; 7,93

¿Qué deportista crees que debemos enviar a las olimpiadas para que nos represente en salto de longitud? ¿Por qué?

(Igual que con las notas por grupos, en el diagrama de barras se aprecia que el deportista A realiza mayor porcentaje de saltos altos y muy altos. En los diagramas de caja, el menor rango intercuartílico del deportista A, así como la posición de la mediana, concuerdan y refuerzan lo que se aprecia en el diagrama de barras.)

07 | Parámetros de dispersión
Desviación media

«La estadística es una ciencia que demuestra que si mi vecino tiene dos coches y yo ninguno, los dos tenemos uno»

George Bernard Shaw

1 Considera la siguiente distribución de datos:

x_i	1	2	3	4	6	7	12
F_i	9	7	3	3	1	1	6

Halla la media, $\bar{x}$, y la desviación media, *DM*, rellenando la siguiente tabla:

	A	*B*	*C*	*D*	*E*
	x_i	F_i	$x_i \cdot F_i$	$\lvert x_i - \bar{x} \rvert$	$\lvert x_i - \bar{x} \rvert \cdot F_i$
1	1	9			
2	2	7			
3	3	3			
4	4	3			
5	6	1			
6	7	1			
7	12	6			

2 Halla la media y la desviación media de esta otra distribución:

x_i	2	3	4	5	6	7
F_i	2	4	12	8	3	1

Para hacerlo, rellena una tabla similar a la de la actividad anterior.

3 Analiza los resultados obtenidos en las actividades anteriores y responde a las siguientes cuestiones:

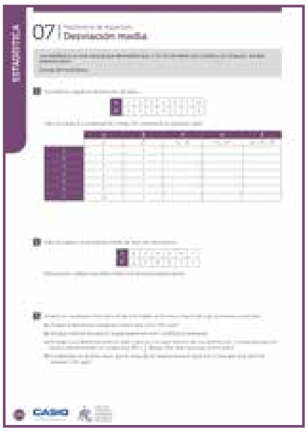
a) ¿Puede la desviación media ser menor que cero? ¿Por qué?

b) ¿En qué casos la desviación media puede ser cero? Justifica tu respuesta.

c) El rango es la diferencia entre el valor máximo y el valor mínimo de una distribución. Comprueba que en las dos distribuciones se cumple que $DM \leq \frac{1}{2}$ *Rango*. ¿Por qué crees que ocurre esto?

d) Comprueba, en ambos casos, que la suma de las desviaciones es igual a 0. ¿Crees que esto ocurrirá siempre? ¿Por qué?

Desviación media



MATERIALES
Calculadora CASIO fx-570/991 SP X II Iberia

NIVEL EDUCATIVO
2º de ESO

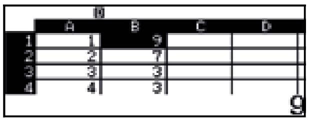
ORIENTACIONES DIDÁCTICAS Y TÉCNICAS

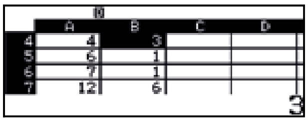
- Con esta la actividad se pretende que el alumnado aprenda y afiance conceptos básicos de estadística a través de su implementación en una hoja de cálculo.
- Para completar las tablas de las actividades se hará uso de la hoja de cálculo que trae incorporada la calculadora.
- Hay que ir con cuidado a la hora de resolver estas actividades, ya que la hoja de cálculo no permite el almacenamiento de datos y/o fórmulas, por lo que cada vez que se encienda la calculadora se tendrá que repetir todo el proceso.
- Como sucede con las hojas de cálculo convencionales, se utiliza el signo "=" (ALPHA CALC) para introducir referencias a otras celdas.

EJEMPLO DE SOLUCIÓN

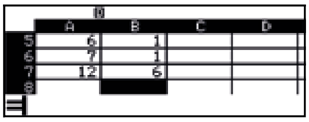
1

En primer lugar se introducen los datos de que se dispone. La primera columna, A, corresponde a los valores que toma la variable, y la segunda, B, a las frecuencias correspondientes:





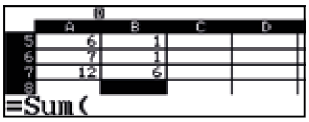
En la celda B8 se puede calcular el número total de datos, que es la suma de las frecuencias registradas, es decir, la suma de los valores de las celdas del rango B1:B7. Para calcular el total de datos, hay que situarse en la celda B8 e introducir el signo = (mediante la combinación de teclas ALPHA CALC).



Seguidamente, hay que pulsar la tecla OPTN y seleccionar la opción 4: *Suma*, tal y como se indica a continuación:

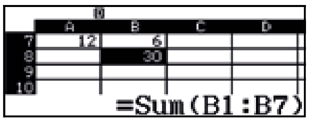
OPTN

4



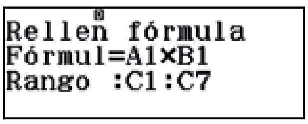
Finalmente se completa la fórmula:

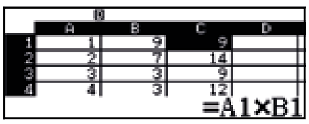
ALPHA ALPHA ALPHA 7



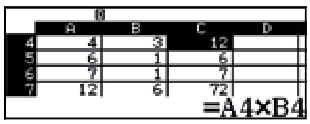
La tercera columna, C, contiene el producto de los valores que toma la variable por las frecuencias correspondientes. Por tanto, para rellenar esta columna, hay que introducir en la celda C1 la fórmula =A1 × B1 y extenderla al rango C1:C7, como se indica a continuación:

OPTN



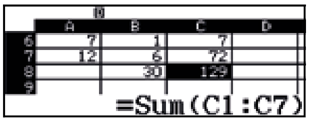


OPTN

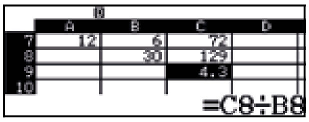


Desviación media

En la celda C8 se puede calcular la suma de los productos del rango C1:C7. Para hacerlo, hay que colocarse en la celda C8 e introducir la fórmula =Sum(C1:C7). Cabe recordar que para introducir la expresión Sum hay que presionar previamente la tecla OPTN.

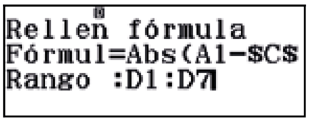


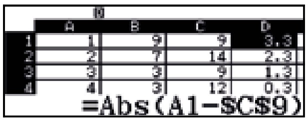
En la celda C9 puede introducirse la media de la distribución, que es el cociente entre el contenido de la celda C8 y el de la B8:

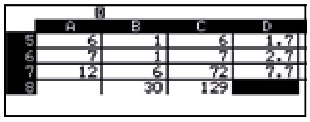


Para rellenar la columna D hay que escribir en la celda D1 la fórmula =Abs(A7-C9) y extenderla en el rango D1:D7:

OPTN 1

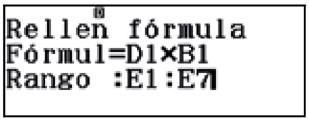


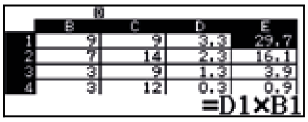


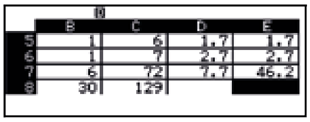


Para rellenar la columna E hay que introducir en la celda E1 la fórmula =D1×B1 y extenderla en el rango E1:E7:

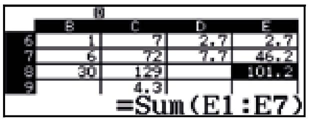
OPTN 1 1



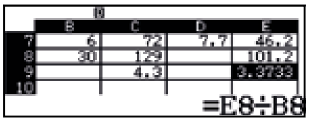




En la celda E8 puede calcularse el total de la columna E:



En la celda E9 puede calcularse la desviación media. Para ello hay que dividir el contenido de la celda E8 entre el contenido de la celda B8:



Como se puede observar en la secuencia de imágenes, la media aritmética de los datos es 4,3, y la desviación media, 3,3733.

2

Esta actividad se resuelve de forma análoga la actividad anterior, obteniéndose una media de 4,3 y una desviación media de 0,8933.

3

a) La desviación media no puede ser menor que cero puesto que es la media aritmética de los valores absolutos de las desviaciones de los datos respecto de la media, $\bar{x}$, en consecuencia, la *DM* es el cociente de una suma de valores no negativos entre un número positivo, por lo que no puede ser negativa.

b) Como la DM es un cociente, para que sea 0, el numerador debe ser 0. El numerador está formado por una suma de términos no negativos, por tanto, la única posibilidad de que dicha suma sea 0 es que todos sus sumandos sean 0, lo que ocurre si $F_i = 0$ o si $|x_i - \bar{x}| = 0$. En consecuencia, *DM* es cero cuando la variable estadística toma un único valor.

c) El caso de mayor dispersión de una variable estadística se da cuando esta toma solo dos valores, precisamente los valores máximo y mínimo que puede tomar. En ese caso, $\bar{x}$ es el valor medio de ambos valores:

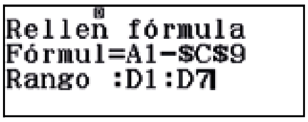
$$|\,x_i - \bar{x}\,| = \frac{x_{max} - x_{min}}{2} = \frac{Rango}{2}$$

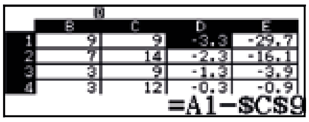
De manera que:

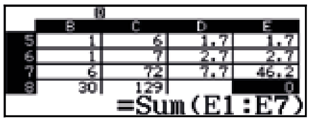
$$DM = \frac{\frac{Rango}{2} + \overset{n-\,veces}{\cdots\cdot} + \frac{Rango}{2}}{n} = \frac{Rango}{2}$$

d) Para demostrar que la suma de las desviaciones es igual a cero, hay que modificar la fórmula que se ha introducido en la columna D, quitando el valor absoluto. Para ello, hay que introducir en la celda D1 la fórmula = A1-C9 y extenderla al rango E1:E7.

OPTN 1







Como se observa, la suma de las desviaciones medias es cero.

08 | Parámetros estadísticos
Cálculo de parámetros estadísticos

La estadística es una disciplina que estudia situaciones que no se pueden predecir con certeza, pero sobre los cuales podemos recabar información. Se trata de una disciplina que trata casi cualquier aspecto de nuestra vida y que tiene importantes aplicaciones en política, sociología, medicina..., así como en actividades más lúdicas, como puedan ser los espectáculos deportivos.

A continuación se muestran dos ejemplos, con datos sin agrupar y con datos agrupados, respectivamente.

1 Stephen Curry es un jugador de la NBA que juega en Golden State Warriors. Las medias de sus puntuaciones por temporada, registradas hasta el año 2016, son las siguientes:

Temporada	Media de puntos
2009/10	17,5
2010/11	18,6
2011/12	14,7
2012/13	22,9
2013/14	24
2014/15	23,8
2015/16	30

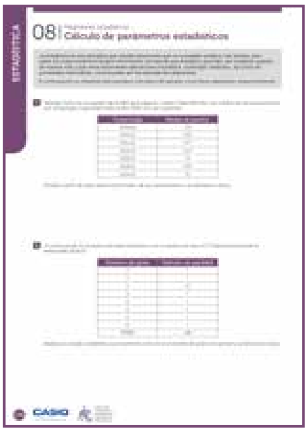
Estudia a partir de estos datos el promedio de sus puntuaciones y su desviación típica.

2 A continuación se muestra una tabla estadística con los goles que hizo el F.C Barcelona durante la temporada 2014/15:

Número de goles	Número de partidos
0	5
1	5
2	10
3	5
4	2
5	6
6	4
8	1
TOTAL	**110**

Realiza un estudio estadístico que te permita conocer el promedio de goles por partido y la desviación típica.

08 | Parámetros estadísticos
Cálculo de parámetros estadísticos



MATERIALES

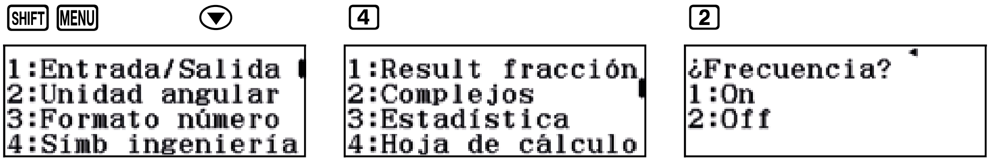
Calculadora CASIO fx-82/85/350 SP X II Iberia o superior

NIVEL EDUCATIVO

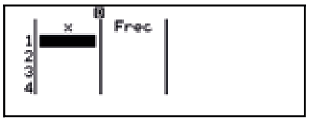
3º de ESO

ORIENTACIONES DIDÁCTICAS Y TÉCNICAS

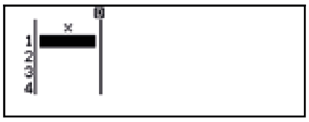
- El objetivo principal de la actividad es que los alumnos entiendan los principios de la estadística y aprendan a resolver problemas con ayuda de la calculadora.
- Existen muchos modelos de calculadora, y cada una de ellas realiza cálculos estadísticos de una manera particular, por lo que conviene ayudar al alumno a conocer su propia máquina.
- Convendría que el alumno conserve el manual de su calculadora para poder realizar consultas cuando lo considere conveniente.
- Para resolver estas actividades es necesario conocer como activar o desactivar la columna de las frecuencias en las tablas estadísticas. No está de más recordar el procedimiento para hacerlo:



- Si se elige la opción 1: *On* las frecuencias absolutas estarán activas en las tablas estadísticas, lo cual es necesario en los problemas donde los datos aparecen agrupados.



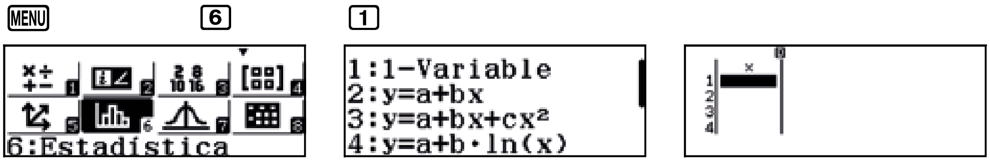
- Si se pulsa 2: *Off* desaparece la columna de las frecuencias absolutas. Esto interesa cuando los datos de la actividad no aparecen agrupados.



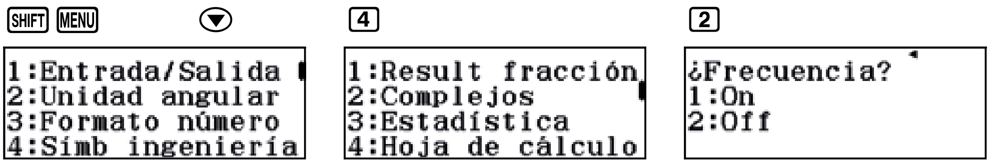
EJEMPLO DE SOLUCIÓN

1

Para realizar esta actividad, hay que entrar en el menú *Estadística* de la calculadora y seleccionar la opción 1: *1-Variable*:



Dado que los datos no están agrupados, no es necesario que las tablas estadísticas muestren la columna de las frecuencias. En caso de que apareciese, puede ocultarse configurando adecuadamente la calculadora, tal y como se muestra a continuación:



Cálculo de parámetros estadísticos

Seguidamente se introducen los promedios por temporada de Stephen Curry:

```
   x
1 |
2 | 18.6
3 | 14.7
4 | 22.9
            17.5
```

Para calcular los parámetros estadísticos se pulsa el botón OPTN y se elige la opción 3: *Cálc 1- variable*. En pantalla aparecerán los parámetros estadísticos.

OPTN 3 ▼ ▼ ▼

```
1:Seleccion tipo
2:Cálc 1-variable
3:Datos
```

```
x̄    =21.64285714
Σx   =151.5
Σx²  =3435.15
σ²x  =22.32244898
σx   =4.724663901
s²x  =26.04285714
```

```
sx      =5.103220272
n       =7
min(x)  =14.7
Q1      =17.5
Med     =22.9
Q3      =24
```

```
max(x) =30
```

Los resultados que nos interesan son la media y la desviación estándar:

$$\bar{x} = 21{,}64285714 \qquad \sigma = 4{,}724663901$$

Con estos dos valores se puede hacer un estudio estadístico. El intervalo $[\bar{x} - \sigma, \bar{x} + \sigma]$ concentra el 66% de los resultados, de manera el 66% de sus promedios corresponden al intervalo [16,92, 26,36]

2

En este caso los datos aparecen agrupados, ya que, en una temporada se disputan 38 partidos y resulta más conveniente agrupar los datos según el número de goles que listar los goles que se hicieron en cada partido, lo que proporcionaría una tabla estadística excesivamente larga y poco práctica.

Se procede a configurar la calculadora de modo que las tablas estadísticas muestren la columna con las frecuencias. Conviene recordar que la secuencia de teclas que permite hacerlo es:

SHIFT MENU ▼ 4 1

```
1:Entrada/Salida
2:Unidad angular
3:Formato número
4:Símb ingeniería
```

```
1:Result fracción
2:Complejos
3:Estadística
4:Hoja de cálculo
```

```
¿Frecuencia?
1:On
2:Off
```

A continuación se introducen los datos, teniendo en cuenta que ahora la variable, x, corresponde al número de goles, y las frecuencias, a los partidos en los que se marcó ese número de goles.

▼

```
   x   Frec
1  0 |
2  1 |    5
3  2 |   10
4  3 |    5
              5
```

```
   x   Frec
5  4 |    2
6  5 |    6
7  6 |    4
8  8 |
              1
```

Para calcular los parámetros estadísticos se pulsa la tecla OPTN y se selecciona la opción 3: *Cálc 1-variable*.

OPTN 3 ▼ ▼

```
1:Seleccion tipo
2:Editor
3:Cálc 1-variable
4:Cal estadística
```

```
x̄    =2.894736842
Σx   =110
Σx²  =480
σ²x  =4.252077562
σx   =2.062056634
s²x  =4.366998578
```

```
sx      =2.089736485
n       =38
min(x)  =0
Q1      =1
Med     =2
Q3      =5
```

```
max(x) =8
```

Los resultados que nos interesan son la media y la desviación estándar:

$$\bar{x} = 2{,}894736842 \qquad \sigma = 2{,}062056634$$

A partir de estos datos y de los parámetros estadísticos se pueden empezar a extraer conclusiones.

OBSERVACIÓN

Para encontrar datos reales con los que realizar ejemplos en el aula, te recomendamos algunas páginas, aunque estamos convencidos que ya las conoces.

www.ine.es

La mayoría de las comunidades disponen de un Instituto propio en el que puedes descargar datos que pueden resultar más cercanos. Por ejemplo, para acceder a datos de las distintas provincias andaluzas puedes visitar

http://www.juntadeandalucia.es/institutodeestadisticaycartografia

Quizás los datos que más interesen al alumnado serán aquellos referentes a distintas actividades deportivas, como pueden ser las estadísticas de los equipos de fútbol o del baloncesto.

Algunas páginas que puedes consultar son:

http://stats.nba.com/

http://www.acb.com/

http://www.laliga.es/estadisticas/laliga-santander/

http://es.uefa.com/uefachampionsleague/season=2017/statistics/index.html

http://es.fifa.com/fifa-tournaments/statistics-and-records/index.html

http://asobal.es/equipos_estadisticas_totales.php

http://www.atpworldtour.com/en/stats

09 | Estadística descriptiva
Notas de varios grupos

Los alumnos de 3º de ESO de un instituto han obtenido las siguientes notas en la asignatura de Matemáticas Académicas.

NOTAS	3º ESO A	3º ESO B	3º ESO C	3º ESO D
0	0	1	0	0
1	0	0	1	0
2	2	1	3	2
3	1	4	3	3
4	3	0	4	3
5	6	3	2	5
6	0	0	0	2
7	0	2	3	3
8	1	3	6	2
9	0	1	1	2
10	0	0	0	0

1 Calcula la nota media y la desviación típica de cada clase.

2 Representa gráficamente los datos.

3 Compara los resultados y redacta un informe donde indiques:

a) ¿Qué clase obtiene mejores resultados?

b) ¿En que clase hay mayor dispersión en las notas?

c) ¿Qué clase tiene una distribución más parecida a la campana de Gauss?

4 ¿Cuál es la nota media de todo 3º de ESO? ¿Puedes calcularla sumando las cuatro medias obtenidas y dividiendo entre cuatro? ¿Por qué?

09 | Estadística descriptiva
Notas de varios grupos

MATERIALES
Calculadora CASIO fx-570/991 SP X II

NIVEL EDUCATIVO
3º de ESO

ORIENTACIONES DIDÁCTICAS Y TÉCNICAS

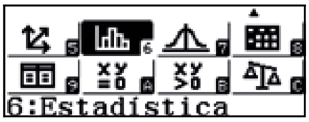
- Con esta actividad se pretende que el alumnado trabaje en grupo. Cada alumno puede realizar individualmente los cálculos estadísticos de una de las clases y, posteriormente, puede hacerse una puesta en común.
- La calculadora permite realizar los cálculos de forma rápida, así como diversas representaciones gráficas que permiten el análisis conjunto de datos y gráficos.
- Desde las tablas estadísticas del menú *Estadística*, presionando la secuencia SHIFT OPTN, se obtienen códigos *QR* que, una vez escaneados, proporcionan diversas representaciones gráficas.
- Puede resultar interesante realizar un debate colectivo a partir del análisis conjunto de las representaciones, tras haber compartido los resultados a una clase creada mediante la aplicación CASIO EDU+.

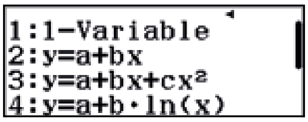
EJEMPLO DE SOLUCIÓN

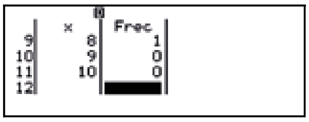
1

Se entra en el menú *Estadística* y se selecciona la opción *1-Variable*. Seguidamente, se introducen los datos.

MENU 6 1

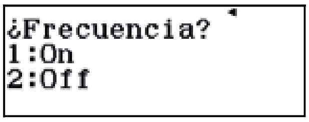






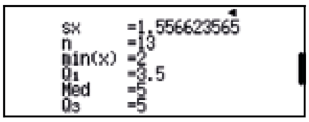
Si no aparece la columna de frecuencias, se puede activar desde:

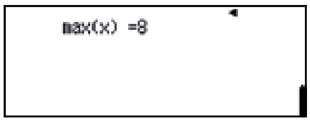
SHIFT MENU ▼ 3 1



Una vez se tienen los datos de una de las clases, se pulsa OPTN 3 para ver el resultado de la estadística unidimensional:

OPTN 3 ▼ ▼ ▼





La nota media de la clase de 3º de ESO A ha sido de: $\bar{x}$ = 4,38

La desviación típica de la clase de 3º de ESO A ha sido de: σ = 1,50

Análogamente, cada grupo realiza los cálculos para la clase asignada.

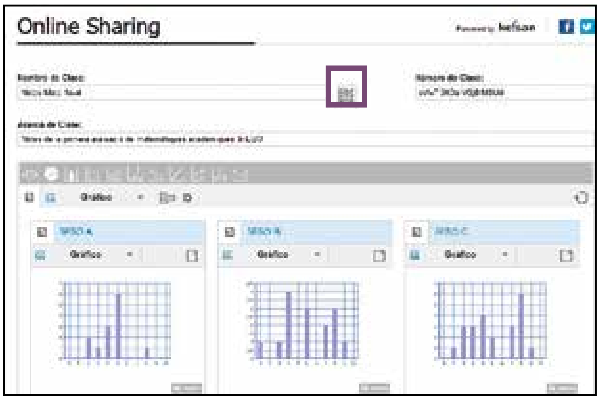
Se puede pedir que cada grupo organice los datos en columnas y que complete los cálculos intermedios de $x_i \cdot F_i$ y $x_i^{\,2} \cdot F_i$. Para ello se puede hacer uso de la aplicación *Hoja de Cálculo*.

Notas de varios grupos

2

Para compartir datos y gráficos, primero se crea una clase desde wes.casio.com/es.es/class.

Una vez creada la clase, se visualiza el código *QR* de la clase para que los alumnos se unan a la clase escaneando el código con su dispositivo móvil. A continuación los alumnos puede compartir sus datos escaneando los códigos *QR* obtenidos con sus datos y compariéndolos con la clase creada. Conforme se actualice la página, se irá viendo la incorporación de los grupos a la clase creada.



3

La observación conjunta de los diagramas de barras y la creación de una tabla resumen de todos los resultados permite responder a las preguntas propuestas, o a otras que puedan surgir. Pueden analizarse también los diagramas de cajas y bigotes, para hacerlo hay que generar los códigos *QR* a partir de las pantallas con los parámetros estadísticos.

	3º ESO A	3º ESO B	3º ESO C	3º ESO D
$\bar{x}$	4,38	5,07	5,22	5,32
σ_x	1,50	2,59	2,47	2,08
C. V.	0,34	0,51	0,47	0,39

El grupo con mejor nota media es el grupo de 3º de ESO D, cuyo gráfico es el que se parece más a una campana de Gauss (distribución normal). Se puede plantear el cálculo de los porcentajes de datos en $(\bar{x} - \sigma_x, \bar{x} + \sigma_x)$ y $(\bar{x} - 2\sigma_x, \bar{x} + 2\sigma_x)$.

El grupo con mayor dispersión en las notas es el grupo de 3º de ESO B. Hay que remarcar que es el único grupo donde hay un alumno con un 0 de nota, lo que puede tener un efecto en la dispersión. Se puede aprovechar este resultado para hablar de datos "*out layer*" y de su influencia en los resultados y generación de posibles errores en la introducción de datos, etc.

Notas de varios grupos

4

La media de las cuatro medias es:

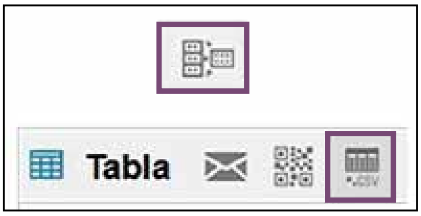
$$\frac{4.38+5.07+5.22+5.32}{4}$$
$$4.9975$$

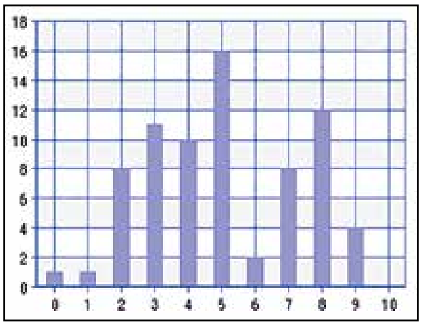
Por tanto, $\bar{x}$ = 4,9975.

Esta media no puede considerarse la media de las notas obtenidos por los alumnos ya que las clases no tienen el mismo número de alumnos. Este es un momento favorable para hablar de media ponderada. Se puede generar una columna de totales que permita realizar un nuevo cálculo de esa media global.

	A	B	C	D	E	F	G	H	I
1		x	FreqA	FreqB	FreqC	FreqV	TOTAL	xi · fi	
2		0	0	1	0	0	1	0	
3		1	0	0	1	0	1	1	
4		2	2	1	3	2	8	16	
5		3	1	4	3	3	11	33	
6		4	3	0	4	3	10	40	
7		5	6	3	2	5	16	80	
8		6	0	0	0	2	2	12	
9		7	0	2	3	3	8	56	
10		8	1	3	6	2	12	96	
11		9	0	1	1	2	4	36	
12		10	0	0	0	0	0	0	
13			13	15	23	22	73	370	
14									
15							MEDIA=	5,07	
16									

Existe la posibilidad de agrupar todos los datos y ver la representación gráfica conjunta, así como de exportar los datos a una hoja de cálculo y poder realizar desde allí nuevos cálculos o gráficos. Para ello, hay que pulsar, respectivamente, los iconos que se indican:





Al calcular la media de forma ponderada, se obtiene:

$$\frac{13}{73}\times 4.38+\frac{15}{73}\times 5.07+\frac{23}{73}\times 5.22+\frac{22}{73}\times 5.32$$
$$5.06\overline{97260273}$$

$\bar{x}$ = 5,07.

10 | Estadística descriptiva
Variación de las temperaturas

Se desea estudiar la evolución de las temperaturas de la localidad de L'Orxa (Alicante) a lo largo de un día, por lo que se han consultado las temperaturas registradas en la estación meteorológica *Meteoclimatic*.

A continuación se muestran los datos registrados:

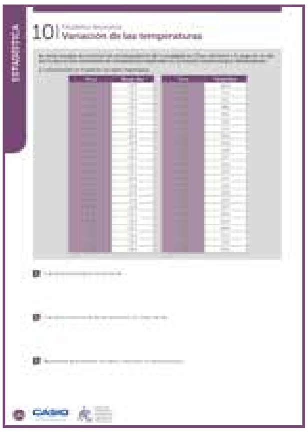
Time	Temp Out	Time	Temp Out
00:00	13,7	12:00	16,8
00:30	13,4	12:30	17,2
01:00	13,4	13:00	17,2
01:30	13,6	13:30	18,1
02:00	13,5	14:00	17,6
02:30	13,4	14:30	17,6
03:00	12,9	15:00	17,3
03:30	12,9	15:30	16,3
04:00	12,8	16:00	15,6
04:30	12,8	16:30	14,6
05:00	12,3	17:00	13,7
05:30	12,2	17:30	12,2
06:00	12,1	18:00	12,2
06:30	12,2	18:30	11,7
07:00	11,8	19:00	11,4
07:30	11,7	19:30	10,8
08:00	11,9	20:00	10,8
08:30	11,8	20:30	10,7
09:00	12,7	21:00	10,6
09:30	13,6	21:30	10,3
10:00	14,7	22:00	10,4
10:30	15,4	22:30	10,1
11:00	15,8	23:00	9,8
11:30	16,5	23:30	10,1

1 Calcula la temperatura media de día.

2 Calcula la variación de las temperaturas a lo largo del día.

3 Representa graficamente los datos y describe tus observaciones.

Variación de las temperaturas



MATERIALES
Calculadora CASIO fx-570/ 991 SP X II Iberia

NIVEL EDUCATIVO
3º de ESO

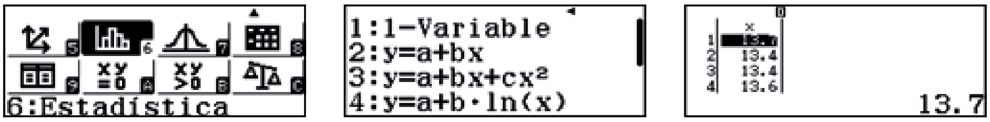
ORIENTACIONES DIDÁCTICAS Y TÉCNICAS
- Con esta actividad, el alumnado podrá trabajar directamente con todos los datos, o agruparlos en intervalos.
- El trabajo con datos reales, la búsqueda de datos, así como su clasificación y análisis resulta muy provechoso y enriquecedor.
- La calculadora permite realizar de forma rápida cálculos y representaciones gráficas diversas con las que poder interpretar los datos.
- En la web de la Asociación Valenciana de Meteorología (www.avamet.org) se pueden encontrar datos similares a los aportados en la actividad con los que trabajar.
- Es posible utilizar otras webs meteórologicas oficiales para adaptar la actividad al entorno del alumno.

EJEMPLO DE SOLUCIÓN

1

La calculadora proporciona la posibilidad de trabajar directamente con los 48 datos. Para hacerlo, se entra en el menú *Estadística* y se selecciona la opción *1-Variable*. Seguidamente, se introducen los datos.

MENU 6 1

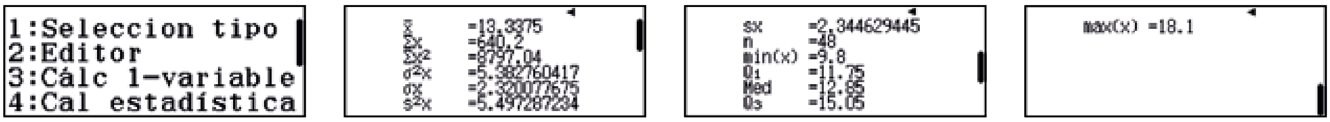


En esta actividad conviene introducir los datos sin activar la columna de las frecuencias. Para desactivarla, en caso de que apareciera, hay que proceder del siguiente modo:

SHIFT MENU ▼ 3 2

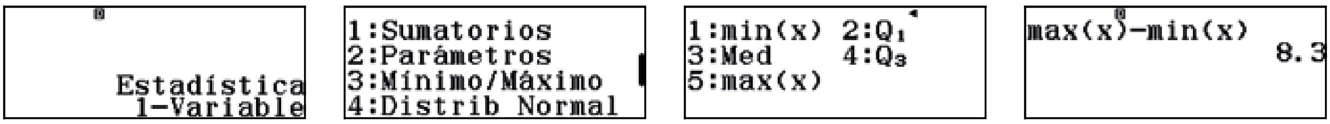
Una vez se han introducido los datos, se pulsa OPTN 3 para ver el resultado de la estadística unidimensional:

OPTN 3 ▼ ▼ ▼



Como se observa, la temperatura media del día ha sido $\bar{x}$ = 13,34 ºC.

AC AC OPTN ▼ 3 =



Variación de las temperaturas

2

En esta actividad el rango puede ser una buena medida de la dispersión (variabilidad):

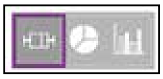
Min = 9,8 °C Máx = 18,1 °C Rango = 18,1 – 9,8 = 8,3 °C

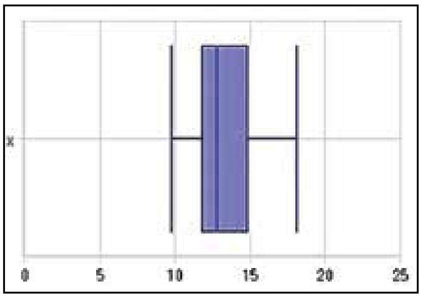
AC AC OPTN ▼	3	5 − OPTN ▼ 3 1	=
Estadística 1-Variable	1:Sumatorios 2:Parámetros 3:Mínimo/Máximo 4:Distrib Normal	1:min(x) 2:Q_1 3:Med 4:Q_3 5:max(x)	max(x)−min(x) 8.3

3

El código *QR* SHIFT OPTN permite ver dos representaciones gráficas interesantes:

A) Diagrama de caja y bigotes



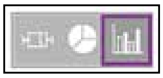


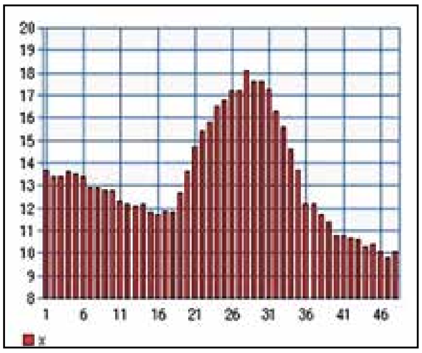
En este gráfico se observa la variabilidad de las temperaturas del día.

Los cuartiles muestran como durante la mitad del día se han tenido unas temperaturas comprendidas entre Q_1 = 11,75 °C y Q_3 = 15,05 °C.

Solo durante 6 horas del día (25 % del tiempo) se ha estado por debajo de los 11,75 °C, y siempre por encima de los 9,8 °C de mínima, por lo que no ha habido heladas.

B) Diagrama de barras





El diagrama de barras muestra que a partir de las 9:00 h las temperaturas empiezan a subir, y a partir de las 15:00 h, a bajar.

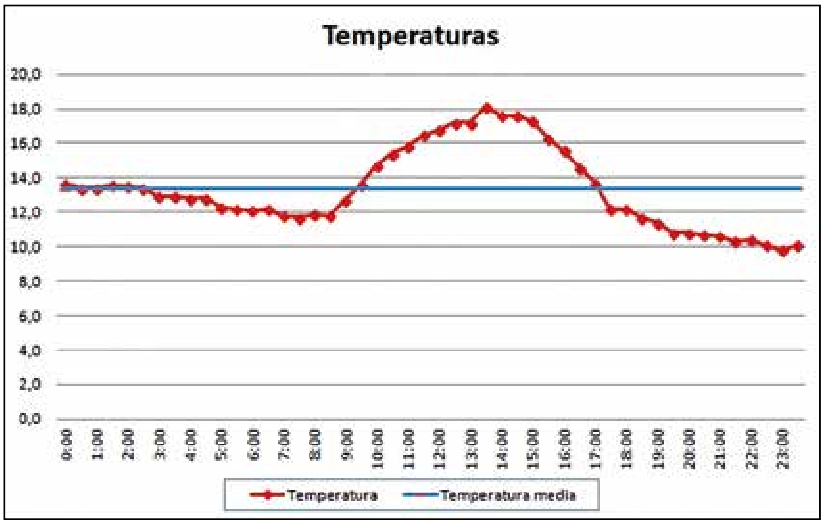
A partir de esta información, y sabiendo las temperaturas refieren a una localidad de la montaña de Alicante, se puede afirmar que se trata de un día de finales de invierno o de principios de primavera

Variación de las temperaturas

OBSERVACIÓN

Existe la posibilidad de exportar los datos de la tabla estadística a una hoja de cálculo. Para hacerlo, hay que pulsar el icono CSV, tal y como se muestra en la figura adjunta:

El archivo exportado permite realizar otro tipo de gráficos:



Propuesta adicional

Se puede plantear, como propuesta adicional, la cuestión de determinar cómo sería el gráfico de un día de invierno o de un día de verano, recogiendo los datos pertinentes en la misma web.

11 | Estadística descriptiva
Nos compramos un *Crossover*

Crossover es un término de marketing que se utiliza en el ámbito automovilístico para definir la gama de automóviles todoterrenos compactos que incorporan las prestaciones y comodidades de los utilitarios.

Hemos decidido comprar un coche de estas características, no sin antes realizar un estudio del mercado. Para ello, hemos comparado los precios de varios modelos con las mismas características, y utilizando distintas vías: internet, llamadas telefónicas, visitas a concesionarios, etc.

Tras realizar el trabajo de campo, hemos construido la siguiente tabla, que muestra los precios de diferentes modelos en distintos concesionarios.

Coche 1	Coche 2	Coche 3	Coche 4	Coche 5	Coche 6
Riat Mont	Sia Sport	Monda Confo	Pisan Tecno	Benat Oleos	Bord Ghia
23 462,00 €	18 852,00 €	21 450,00 €	28 350,00 €	23 350,00 €	20 900,00 €
24 841,00 €	20 223,00 €	23 000,00 €	27 900,00 €	31 750,00 €	21 059,00 €
25 847,00 €	20 832,00 €	23 829,00 €	27 250,00 €	30 100,00 €	21 500,00 €
29 325,00 €	21 239,00 €	24 400,00 €	28 350,00 €	23 850,00 €	21 500,00 €
29 325,00 €	23 100,00 €	26 100,00 €	27 700,00 €	27 750,00 €	21 800,00 €
26 400,00 €	23 100,00 €	26 600,00 €	26 500,00 €		22 000,00 €
26 400,00 €	23 527,00 €	26 900,00 €	19 250,00 €		22 300,00 €
25 900,00 €	23 700,00 €	27 500,00 €	26 500,00 €		22 500,00 €
26 500,00 €	23 750,00 €	27 600,00 €	27 700,00 €		22 573,00 €
28 530,00 €	23 750,00 €	27 900,00 €	24 450,00 €		22 800,00 €
	23 950,00 €	27 900,00 €			23 000,00 €
					24 000,00 €
					24 262,00 €

1 Calcula el precio medio de cada modelo.

2 Calcula la variación (desviación típica y rango) para cada modelo.

3 Representa gráficamente los datos, utilizando diagramas de caja y bigotes, y prepara un informe con tus observaciones.

4 Calcula el precio medio de esta gama de *Crossovers*.

Nos compramos un *Crossover*

MATERIALES
Calculadora CASIO fx-570/ 991 SP X II Iberia

NIVEL EDUCATIVO
3º de ESO

ORIENTACIONES DIDÁCTICAS Y TÉCNICAS

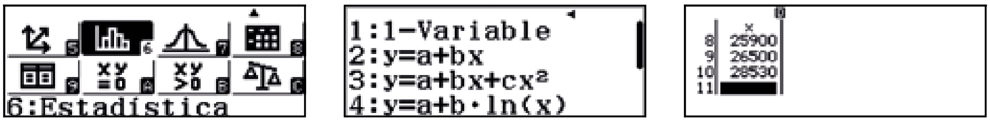
- Con esta actividad el alumnado podrá trabajar en grupo cada modelo de coche.
- Se propone que puedan ser ellos mismos los que consigan los precios, para que realicen el trabajo de campo de recogida de datos reales.
- Puede ser una experiencia muy enriquecedora si la búsqueda de datos se realiza a partir de diversas fuentes (Internet, vía telefónica, consulta a concesionarios acompañados por adultos…).

EJEMPLO DE SOLUCIÓN

1

Desde el menú *Estadística* se selecciona la opción *1-Variable*. Seguidamente, se introducen los datos.

MENU 6 1

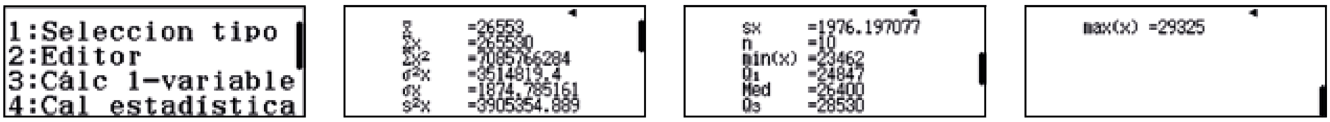


Para esta actividad conviene que la columna de frecuencias no esté visible. En caso de que lo estuviera, se puede desactivar mediante:

SHIFT MENU ▼ 3 2

Una vez se tienen los datos de una de las clases, se pulsa OPTN 3 para ver el resultado de la estadística unidimensional:

OPTN 3 ▼ ▼ ▼



El precio medio del **Riat Mont** es $\bar{x}$ = 26 553,00 € .

Como medidas de la dispersión (variabilidad de los precios) se calcula el rango y la desviación típica:

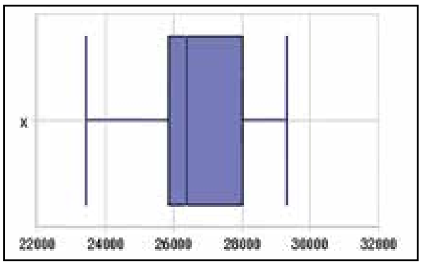
Precio mínimo = 23 462,00 € Rango = 5 863,00 €

Precio máximo = 29 325,00 € Desviación típica = 1 874,76 €

Cada grupo realiza sus cálculos, con los que se prepara la siguiente tabla resumen:

	Precio medio	Precio Mín.	Precio Máx.	Rango	Desv. Típica
Riat Mont	26 553,00	23 462,00	29 325,00	5 863,00	1 874,76
Sia Sport	22 365,73	18 852,00	23 950,00	5 098,00	1 681,69
Monda Confo	25 743,55	21 450,00	27 900,00	6 450,00	2 120,51
Pisan Tecno	27 395,00	24 450,00	29 250,00	4 800,00	1 265,00
Benat Oleos	27 260,00	23 350,00	31 750,00	8 400,00	3 326,62
Bord Ghia	22 322,62	20 900,00	24 262,00	3 362,00	988,68

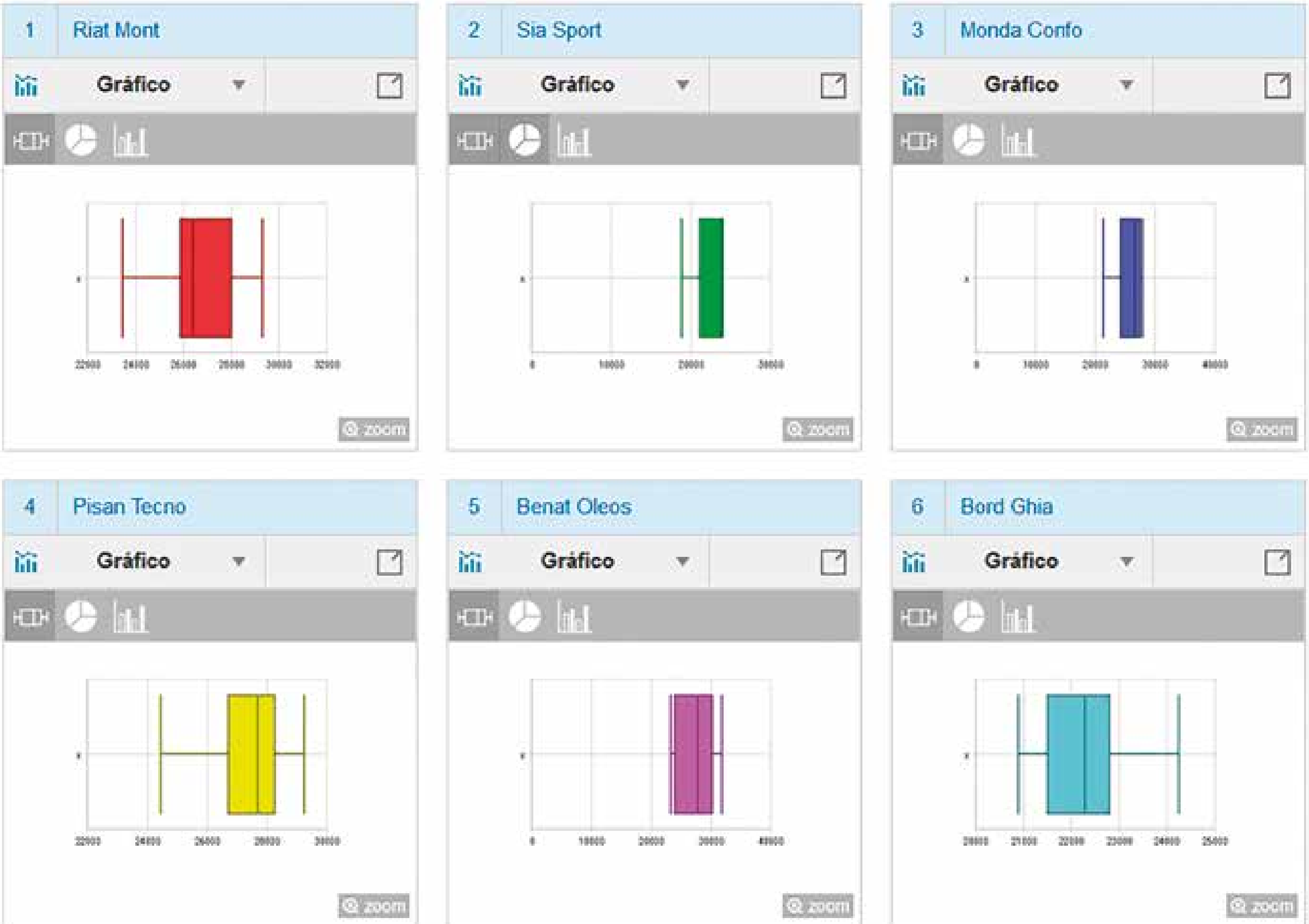
Nos compramos un *Crossover*



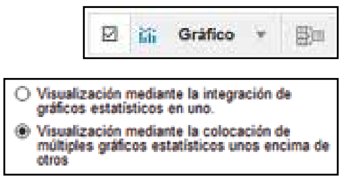
En este gráfico se observa la variabilidad de los precios del modelo de coche.

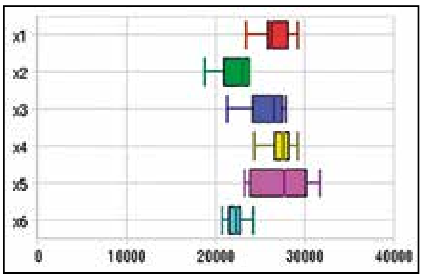
La distancia entre los cuartiles Q_1 y Q_3 indica que, para este modelo, el 50 % de los precios se encuentran entre los Q_1 = 24 847,00 € y los Q_3 = 28 530,00 €.

Se puede crear una clase desde http://wes.casio.com/es-es/class en la que incorporar los modelos del estudio mediante la aplicación CASIO EDU⁺, lo que permitirá visualizarlos todos a la vez para comparar y debatir en grupo.



Si se seleccionan todos los gráficos, se pueden combinar generando un nuevo gráfico muy interesante en el que se puede observar de manera conjunta y bajo una misma escala de trabajo, los resultados obtenidos.





Se puede redactar un informe, en los mismos términos al que hemos redactado tras observar los resultados numéricos de la tabla resumen, con la observación de este gráfico múltiple.

Finalmente, se pueden exportar los datos a una hoja de cálculo con el fin de realizar otro tipo de gráficos desde el icono de tabla CSV.

Ampliación

1 Analiza el consumo de al menos diez modelos de *Crossover* con motor gasolina y otros diez con motor diésel, que tengan potencias similares.

a) Realiza una tabla para los modelos de gasolina y otra para los de diésel.

b) ¿Cuál es el consumo medio en los motores de gasolina? ¿Y para los motores diésel?

c) ¿En qué tipo de combustible hay una mayor variación en el consumo?

d) Representa los datos gráficamente, utilizando el tipo de diagrama que consideres más adecuado.

e) Compara los diagramas y comenta los resultados obtenidos.

12 | Regresión: cálculo e interpretación
Atletismo: 1 500 metros lisos masculinos

La carrera de los 1 500 m lisos es en la actualidad la prueba estrella del atletismo de medio fondo.

La modalidad masculina forma parte de los Juegos Olímpicos modernos desde su primera edición, que tuvo lugar en Atenas en 1896. En dicha edición resultó vencedor el australiano Edwin Flack, quien obtuvo un registro de 4′ 33,2′′.

La modalidad femenina no fue reconocida hasta las Olimpiadas del año 1972, en las que resultó vencedora la soviética Lyudmila Bragina, con un tiempo de 4′ 01,38".

El atleta que ganó esta prueba en los Juegos Olímpicos, celebrados en Brasil, en el año 2016, fue el estadounidense Matthew Centrowitz, con un tiempo de 3′ 50′′.

Actualmente, el récord mundial lo ostenta el marroquí Hicham El Guerrouj, quien obtuvo en Roma, en junio del año 1988, la extraordinaria marca de 3′ 26,17".

La tabla que te presentamos a continuación recoge las marcas olímpicas de la carrera de 1 500 m masculinos desde Atenas 1896 hasta Río 2016:

AÑO	MARCA (min.)	AÑO	MARCA (min.)	AÑO	MARCA (min.)
1896	4,553	1948	3,83	1988	3,599
1900	4,103	1952	3,752	1992	3,678
1904	4,09	1956	3,687	1996	3,596
1908	4,057	1960	3,593	2000	3,535
1912	3,947	1964	3,635	2004	3,570
1920	4,03	1968	3,582	2008	3,549
1924	3,893	1972	3,605	2012	3,569
1928	3,887	1976	3,653	2016	3,833
1932	3,853	1980	3,64		
1936	3,797	1984	3,542		

1. Dibuja un diagrama de puntos que represente la información.
2. ¿Crees que los datos presentan una tendencia lineal? Justifica tu respuesta.
3. Dibuja una recta que represente la nube de puntos. ¿Sabes cómo se llama esta recta?
4. Obtén con la ayuda de la calculadora la expresión analítica de la recta anterior.
5. ¿En qué años no se celebraron olimpiadas? ¿Sabes por qué?
6. ¿Podrías predecir las marcas de los años olímpicos que faltan? Explica cómo lo harías.
7. ¿Crees que es razonable utilizar la recta de regresión para estimar la marca en los juegos olímpicos de 2048? ¿Por qué?
8. ¿Y para los del 2200? ¿Por qué?

12 | Regresión: cálculo e interpretación
Atletismo: 1 500 metros lisos masculinos

MATERIALES

Calculadora CASIO fx-570/991 SP X II Iberia
Aplicación CASIO EDU⁺

NIVEL EDUCATIVO

4º de ESO

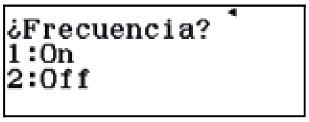
ORIENTACIONES DIDÁCTICAS Y TÉCNICAS

- El uso de la calculadora favorece la anticipación de conocimientos, anteponiendo, en la resolución de problemas, la experimentación, la interpretación y la formulación de conjeturas al cálculo algorítmico.

- Con esta actividad se persigue introducir el concepto de regresión lineal a los estudiantes de cuarto curso de secundaria, para trabajar su interpretación y estudiar sus limitaciones, utilizando datos reales. Las actividades están planteadas para que los alumnos reflexionen sobre los datos que se les presenta, antes de acudir a la calculadora.

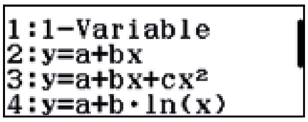
- Antes de iniciar el trabajo con la calculadora, es conveniente elegir la configuración con la que se realizarán los cálculos. En este caso se configura la calculadora para que las tablas estadísticas no muestren las frecuencias:

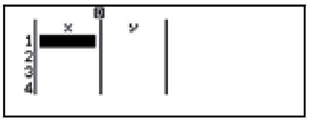
SHIFT MENU ▽ 3 2

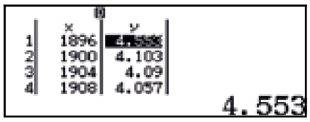


- A continuación se selecciona el menú *Estadística* y la opción 2: $y=a+bx$, que permite trabajar con regresiones lineales. Seguidamente se introduce en la columna x los años y en la columna y las marcas:

MENU 6 2





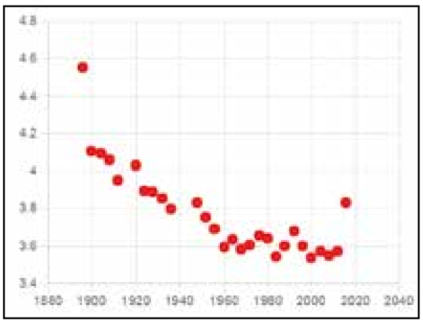


- Para visualizar la nube de puntos en la aplicación CASIO EDU⁺, es necesario generar un código *QR* (mediante la secuencia de teclas SHIFT OPTN). Dicho código se tiene que escanear con la aplicación y abrir o compartir en una clase previamente creada.

- En esta ocasión, la calculadora genera dos códigos, de manera que deben ser escaneados en orden para visualizar la nube de puntos

EJEMPLO DE SOLUCIÓN

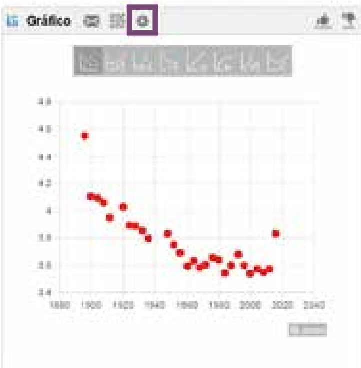
La aplicación CASIO EDU⁺ muestra la siguiente nube de puntos:

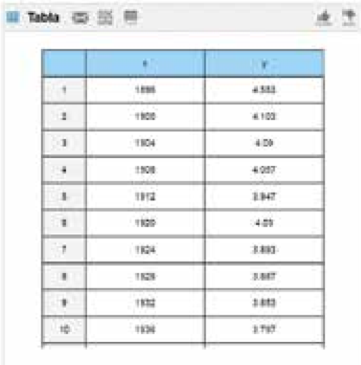


12 | Regresión: cálculo e interpretación

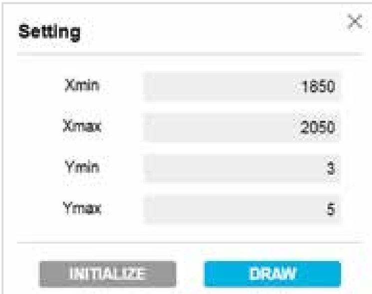
Atletismo: 1 500 metros lisos masculinos

La aplicación permite cambiar la escala de los ejes. Para ello hay que presionar el icono de preferencias.

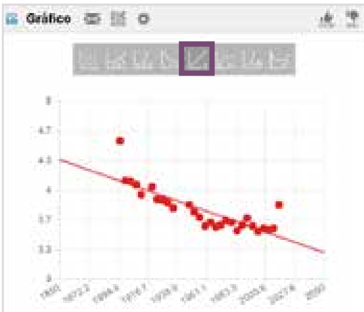




Escogemos la escala de los ejes que más nos convenga.

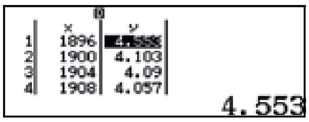


Antes de obtener la ecuación de la recta de regresión con la calculadora, se puede visualizar la gráfica correspondiente en la aplicación CASIO EDU+. Basta con seleccionar el icono adecuado.

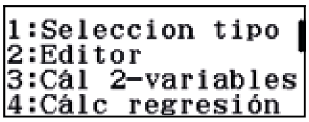


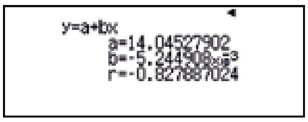
Para hallar la expresión analítica con la calculadora, se presiona la tecla OPTN y se selecciona la opción 4: *Cálc regresión*.

OPTN



4





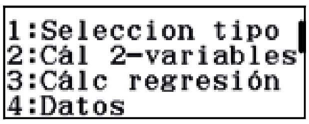
$$y = -0{,}005244908x + 14{,}04527902$$

Para determinar las marcas estimadas para los años que se piden, se pueden utilizar diversos procedimientos:

A) Desde la pantalla *Estadística* (AC) se presiona OPTN y se selecciona la opción 4: *Regresión*.

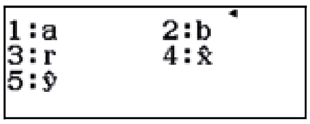
AC OPTN

▼



4

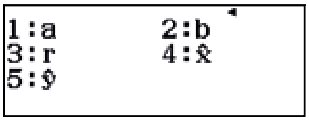
5

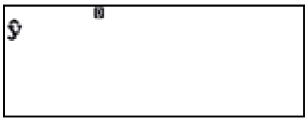


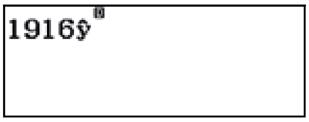
Atletismo: 1 500 metros lisos masculinos

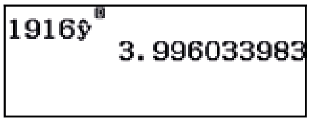
La opción 5: $\hat{y}$ permite obtener el valor de la variable y conocido el valor que toma la variable x. Así, por ejemplo, para determinar la marca del año 1946, hay que proceder de la siguiente manera:

5 ◀ 1 9 1 6





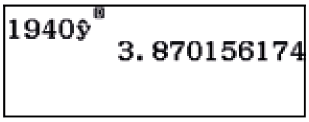




En consecuencia, se tiene que $\hat{y}(1916)$ = 3,996 min = 3′ 59,76′′.

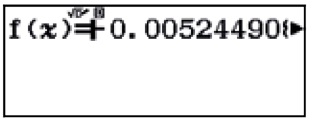
Para hallar las marcas que corresponden a otros años, basta con reescribir la expresión anterior, introduciendo el valor deseado de la variable x.

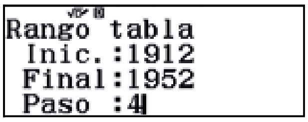
◀ ◀ DEL DEL 4 0 ▶ =

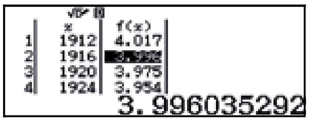


Se obtiene, así: $\hat{y}(1940)$ = 3,870 min = 3′ 52,22″

B) Desde el menú *Tabla* se introduce la expresión de la regresión en la función $f(x)$ y se elige el rango de la tabla:





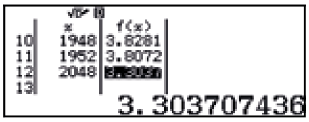


$\hat{y}(1916)$ = 3,996 minutos = 3′ 59,76″

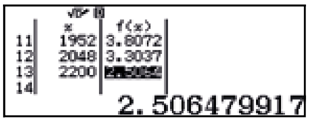
$\hat{y}(1940)$ = 3,870 minutos = 3′ 52,2″

$\hat{y}(1944)$ = 3,849 minutos = 3′ 50,94″

El menú *Tabla* permite introducir directamente un valor:



$\hat{y}(2048)$ = 3,304 minutos = 3′ 18,242″



$\hat{y}(2200)$ = 2,506 minutos = 2' 30,36″

13 | Regresión: cálculo e interpretación
Esperanza de vida al nacer

¿Qué es la esperanza de vida al nacer? ¿Crees que es la misma para hombres y mujeres? ¿Qué crees que es la brecha de género?

La esperanza de vida al nacer es el número medio de años que esperaría vivir una persona en caso de mantenerse el patrón de mortalidad por edad (tasas de mortalidad a cada edad) actualmente observado. La esperanza de vida es el indicador más ampliamente utilizado para realizar comparaciones sobre la incidencia de la mortalidad en distintas poblaciones y, en base a ello, sobre las condiciones de salud y el nivel de desarrollo de una población.

La brecha de género (mujeres-hombres) es la diferencia de años entre la esperanza de vida de los hombres y la de las mujeres.

Hemos obtenido los siguientes datos del INE respecto a la esperanza de vida al nacimiento en España desde el año 1991 hasta el 2013.

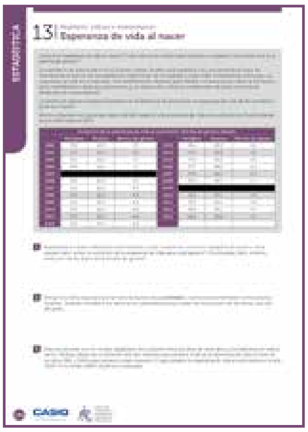
Evolución de la esperanza de vida al nacimiento. Brecha de género. España							
	Hombres	Mujeres	Brecha de género		Hombres	Mujeres	Brecha de género
1991	73,5	80,7	7,2	2003	76,4	83,0	6,6
1992	73,9	81,2	7,3	2004	77,0	83,6	6,6
1993	74,1	81,2	7,1	2005	77,0	83,5	6,5
1994	74,5	81,6	7,1	2006	77,7	84,2	6,4
1995	[redacted]			2007	77,8	84,1	6,4
1996	74,6	81,8	7,2	2008	78,2	84,3	6,1
1997	75,2	82,2	6,9	2009	[redacted]		
1998	75,4	82,3	6,9	2010	79,1	85,1	6,0
1999	75,4	82,3	6,9	2011	79,3	85,2	5,8
2000	75,9	82,7	6,8	2012	79,4	85,1	5,7
2001	76,3	83,1	6,8	2013	80,0	85,6	5,6
2002	76,4	83,1	6,8				

1 Representa los datos referentes a los hombres y a las mujeres en un mismo diagrama de puntos. ¿Qué puedes decir sobre la evolución de la esperanza de vida para cada género? ¿Qué puedes decir sobre la evolución de los datos de la brecha de género?

2 Dibuja una recta que pase por la nube de puntos de la **actividad 1**, tanto para los hombres como para las mujeres. Después introduce los datos en tu calculadora para y obtén las ecuaciones de las rectas que has dibujado.

3 Estas ecuaciones son un modelo algebraico de la relación entre los años de nacimiento y la esperanza de vida al nacer. ¿Podrías utilizar las ecuaciones que has obtenido para predecir cuál fue la esperanza de vida al nacer en los años 1995 y 2009 para hombres y para mujeres? ¿Y para predecir la esperanza de vida al nacimiento en el año 2029? ¿Y en el año 2063? Justifica tu respuesta.

13 | Regresión: cálculo e interpretación
Esperanza de vida al nacer



MATERIALES
Calculadora CASIO fx-570/991 SP X II Iberia
Aplicación CASIO EDU+

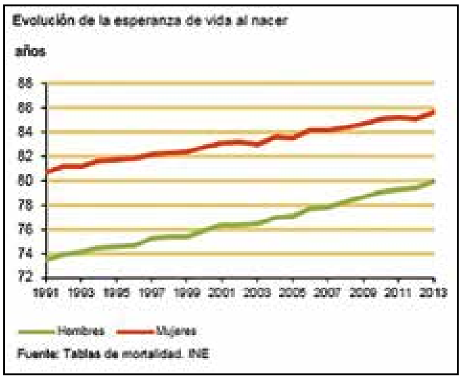
NIVEL EDUCATIVO
4º de ESO

ORIENTACIONES DIDÁCTICAS Y TÉCNICAS

- Con esta actividad se pretende que los alumnos de secundaria se inicien en el concepto de regresión lineal, utilizando datos reales.
- El uso de la calculadora propicia que la tarea se centre en la interpretación de los resultados y en el estudio de las limitaciones de la regresión lineal, y no tanto en el cálculo de la ecuación de la recta de regresión.
- Para realizar la actividad, conviene configurar la calculadora para que la tabla estadística no muestre la columna de las frecuencias. Para ello se procede tecleando la secuencia SHIFT MENU ▼ 3 2. Seguidamente, hay que seleccionar, en el menú *Estadística*, la opción 2: *regresión lineal* (MENU 6 2).
- Para visualizar la nube de puntos en la aplicación CASIO EDU+, es necesario generar un código *QR* (SHIFT OPTN), que se escaneará con dicha aplicación. El gráfico resultante se compartirá con una clase previamente creada. En esta ocasión, se tendrá que generar un código *QR* para los datos referentes a los hombres y otro para el correspondiente a las mujeres.

EJEMPLO DE SOLUCIÓN

A continuación se muestra un gráfico proporcionado por el INE sobre la evolución de la esperanza de vida al nacer:



Como se observa, en los países occidentales la esperanza de vida ha experimentado notables avances en el último siglo, y se ha conseguido con disminuciones en la probabilidad de morir debido a los avances médicos y tecnológicos, a la reducción en las tasas de mortalidad infantil, a cambios en los hábitos nutricionales y estilos de vida y a la mejora en las condiciones de vida y en la educación, así como al acceso de la población a los servicios sanitarios.

En las últimas décadas ha aumentado significativamente la esperanza de vida al nacimiento en hombres y mujeres, y la diferencia entre hombres y mujeres en años de esperanza de vida al nacer ha disminuido.

Según indican las proyecciones, la esperanza de vida al nacimiento alcanzaría los 84,0 años en los hombres y los 88,7 en las mujeres en el año 2029, lo que supone un incremento de 4,0 y de 3,0 años, respectivamente, respecto a los valores actuales. Ello supone alcanzar los 90,9 años de esperanza de vida al nacimiento para los hombres en el año 2063 y los 94,3 años para las mujeres.

http://www.ine.es/jaxi/menu.do?type=pcaxis&path=%2Ft20%2Fp319a%2Fserie%2Fp01&file=pcaxis&N=&L=0

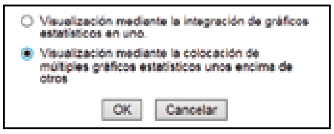
13 | Regresión: cálculo e interpretación
Esperanza de vida al nacer

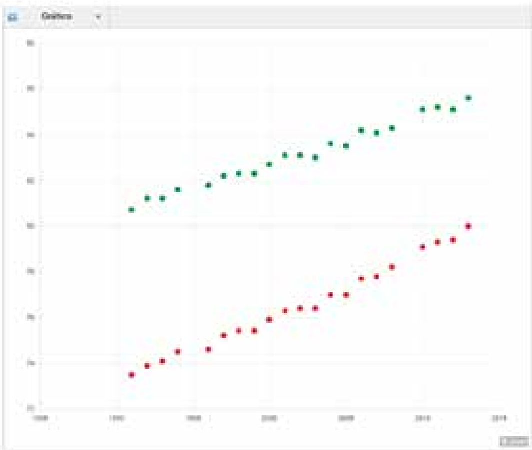
1

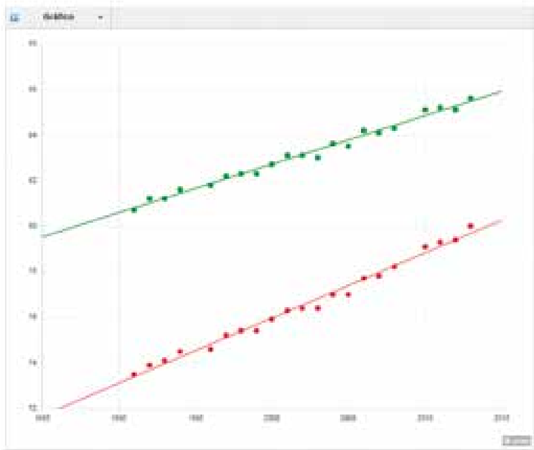
Para obtener las representaciones, se introducen los datos en la calculadora y se generan los correspondientes códigos QR. Las nubes de puntos se visualizan escaneando dichos códigos con la aplicación CASIO EDU+:

2

La creación de una clase mediante la aplicación CASIO EDU+ y la incorporación de ambos gráficos en la misma, permite combinar ambas nubes de puntos y representar gráficamente las correspondientes rectas de regresión.

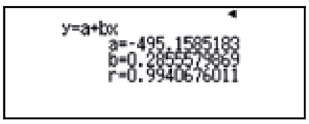




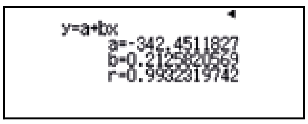


Las expresiones analíticas de las rectas de regresión se obtienen presionando la secuencia OPTN 4.

Hombres



Mujeres



Las rectas de regresión correspondientes a la esperanza de vida al nacer para hombres y mujeres son, respectivamente:

$f(x) = 0{,}2855579869x - 495{,}1585183$

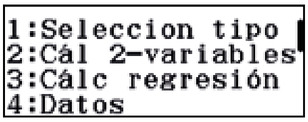
$g(x) = 0{,}2125820569x - 342{,}4511827$

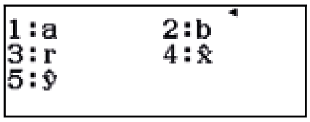
3

El cálculo de los valores estimados se puede hacer de dos formas distintas:

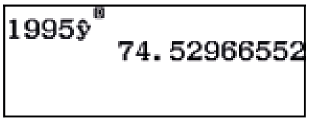
A) Desde el menú *Estadística*, con la siguiente secuencia de teclas:

AC OPTN ▼ 4 5





La opción 5:$\hat{y}$ permite estimar el valor de la variable y conocido el valor que toma la variable x. Así, en el caso de los hombres, se tiene:

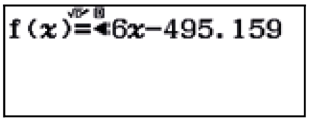


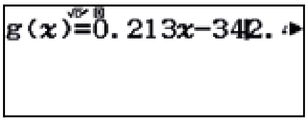
$\hat{y}(1995) = 74{,}53$

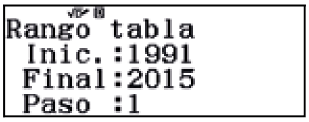
Para calcular el resto de estimaciones, basta con editar esta expresión e introducir el resto de valores.

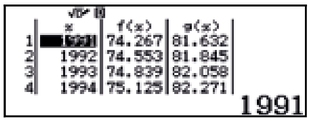
B) Desde el menú *Tabla* se introducen las expresiones de las regresiones en las funciones $f(x)$ y $g(x)$ y se elige el rango de la tabla. La tabla permite introducir directamente valores para calcular las imágenes.

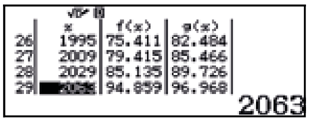
Si se introducen las ecuaciones de las regresiones con valores aproximados para los coeficientes, se obtienen los siguientes resultados:











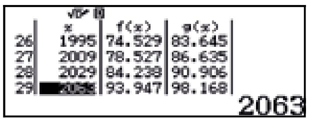
$f(1995) = 75{,}4$ $g(1995) = 82{,}5$ (Los datos reales son, respectivamente, 74,5 y 81,7)

$f(2009) = 79{,}4$ $g(2009) = 85{,}5$ (Los datos reales son, respectivamente, 78,6 y 84,7)

$f(2029) = 85{,}1$ $g(2029) = 89{,}7$

$f(2063) = 94{,}9$ $g(2063) = 97$

Ahora bien, si se introducen las funciones con todos los decimales que nos proporciona la calculadora, las estimaciones que se obtienen son:



$f(1995) = 74{,}5$ $g(1995) = 83{,}7$ (Los datos reales son, respectivamente, 74,5 y 81,7)

$f(2009) = 78{,}5$ $g(2009) = 86{,}6$ (Los datos reales son, respectivamente, 78,6 y 84,7)

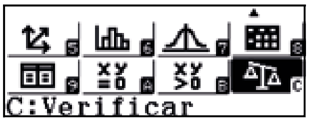
$f(2029) = 84{,}2$ $g(2029) = 90{,}9$

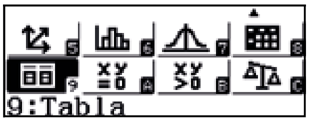
$f(2063) = 93{,}9$ $g(2063) = 98{,}1$

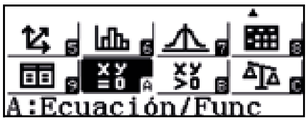
CASIO
División Educativa
Federación Española de Sociedades de Profesores de Matemáticas

Las aplicaciones *Tabla, Verificar* y *Ecuación/Función*

Las nuevas calculadoras ClassWiz disponen de varios menús que facilitan el estudio de los polinomios. Se trata de los menús *Verificar*, *Tabla* y *Ecuación/Función*.







El menú *Verificar*, por ejemplo, permite comprobar de manera sencilla el resultado de una división polinómica, relacionando dividendo, divisor, cociente y resto, lo que será de gran utilidad en cursos posteriores.

Los menús *Ecuación/Función* y *Tabla* propician que el tiempo que tradicionalmente se destina a encontrar las raíces enteras de un polinomio entre el conjunto de raíces enteras posibles, se pueda dedicar a ampliar el cálculo a las raíces reales, así como a obtener la relación que existe entre estas raíces y los puntos de corte con el eje de abscisas de la función polinómica asociada. La posibilidad de analizar gráficamente a través del código *QR* de la ClassWiz y de la aplicación CASIO EDU⁺ dicha relación favorece el aprendizaje significativo y permite poner en contexto teoremas como el de Bolzano o el del valor medio, que se estudiarán en cursos posteriores.

A continuación se plantean algunas actividades pensadas para que los estudiantes descubran la relación entre las raíces de un polinomio, las soluciones de las ecuaciones asociadas a dicho polinomio y los puntos de corte con el eje de abscisas de la función asociada a partir de su gráfica.

Se recomienda que los estudiantes realicen las actividades propuestas utilizando los menús: *Verificar*, *Ecuación/Función* y *Tabla*; así como el análisis de las funciones polinómicas en la aplicación CASIO EDU⁺.

Divide $(x^5 - 3x^2 + 3x - 4) : (x - 2)$ por el método de Ruffini. Comprueba tus resultados con la calculadora.

Paolo Ruffini (1765–1822) fue un matemático italiano que estableció un método breve para dividir polinomios cuando el divisor es un binomio de la forma $x - a$.

Al realizar la división por el método de Ruffini se obtiene:

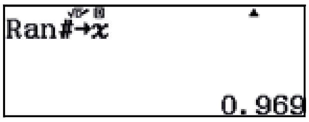
$C(x) = x^4 + 2x^3 + 4x^2 + 5x + 13$; $R(x) = 22$

Para comprobar la veracidad del resultado, se puede utilizar el menú *Verificar*. Hay que tener en cuenta que la comparación que realiza dicho menú no es algebraica, sinó numérica. Es decir, se compara el valor numérico de los dos miembros de la igualdad en función de cuál sea el valor almacenado en la calculadora, en ese momento, para la variable x.

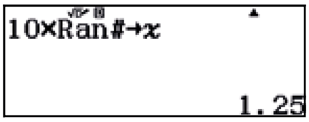
Para comprobar que $(x^4 + 2x^3 + 4x^2 + 5x + 1) \cdot (x - 2) + 22 = x^5 - 3x^2 + 3x - 4$ para cualquier valor que tome x, se puede asignar un valor aleatorio a dicha variable. Para ello, se pueden usar las funciones *Ran#* y *RanInt#*.

A continuación se muestran algunos ejemplos de como asignar un valor arbitrario a x:

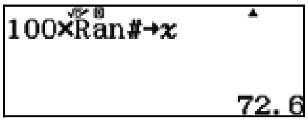
Un número decimal menor que 1



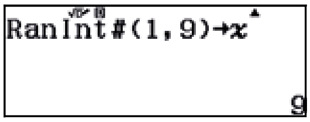
Un número decimal entre 1 y 10



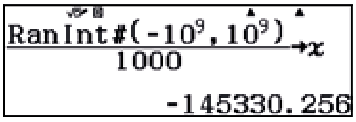
Un número decimal entre 1 y 100



Un número natural entre 1 y 9

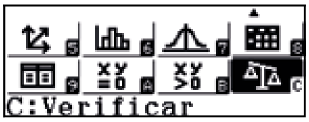


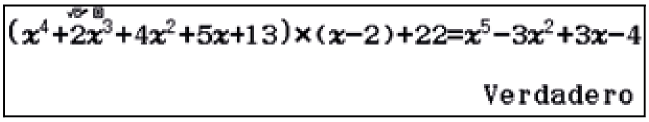
Se puede asignar un valor más arbitrario, ampliando el rango de los valores obtenidos mediante *RanInt#* y con tres cifras decimales:



Las aplicaciones *Tabla, Verificar* y *Ecuación/Función*

Una vez se ha introducido un valor aleatorio en la variable x, se puede hacer uso del menú *Verificar* para comprobar que se verifica la prueba de la división.



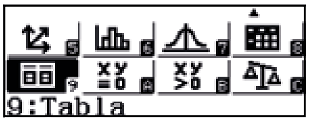


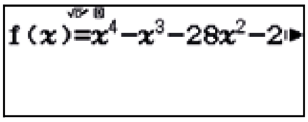
Hay que tener en cuenta que el signo «=» del menú *Verificar* se obtiene pulsando la combinación de teclas ALPHA CALC.

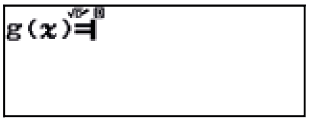
Halla las raíces enteras del polinomio $x^4 - x^3 - 28x^2 - 20x + 48$

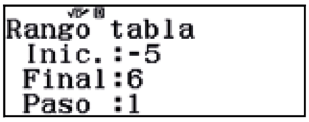
Se puede utilizar el menú *Tabla* para localizar las raíces enteras. La aplicación requiere que se introduzca una expresión algebraica para una función $f(x)$ y otra para una segunda función $g(x)$:

MENU 9

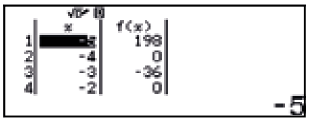


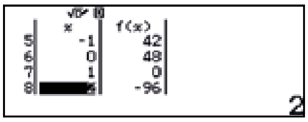


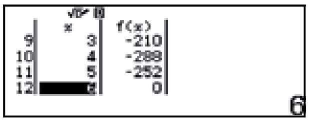




Como solo interesa estudiar las raíces de un polinomio, se introduce la expresión del polinomio a analizar en $f(x)$ y se ignora $g(x)$. Se obtiene, asi, una tabla de valores en la que pueden localizarse los ceros de la función:



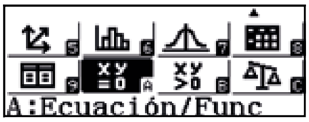


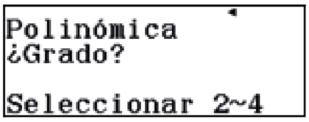


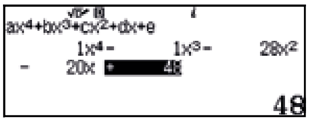
Se observan cuatro raíces del polinomio: 6, −4, −2, 1

Las raíces de un polinomio de grado 4 pueden hallarse también mediante el menú *Ecuación/Función*, seleccionando la opción *2:Polinómica*:

MENU 9 | 2 | 4

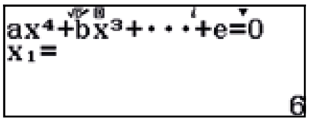


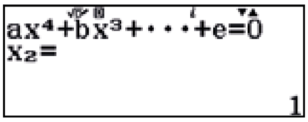


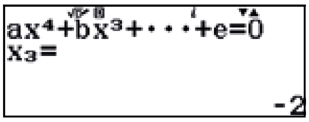


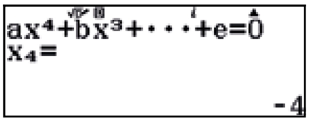
Las soluciones de la ecuación resultan ser las que se indican a continuación:

= | = | = | =







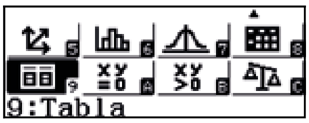


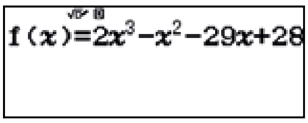
Esta actividad pretende que los estudiantes puedan deducir que las raíces son divisores del término independiente y que a partir de estas se puede factorizar el polinomio. La comprobación de la factorización se puede realizar con el menú *Verificar* y ajustarla en el caso de coeficiente principal distinto de la unidad.

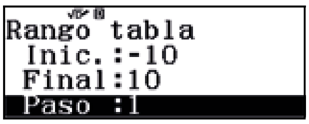
¿En qué puntos corta $y = 2x^3 - x^2 - 29x + 28$ al eje *OX*?

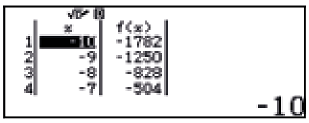
Para responder a esta pregunta, se puede representar la función. Se introduce la expresión de la función en el menú *Tabla*:

MENU 9



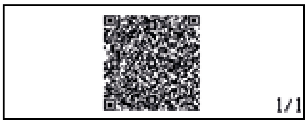




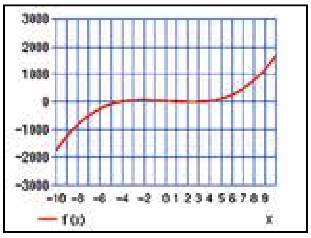


Las aplicaciones *Tabla, Verificar* y *Ecuación/Función*

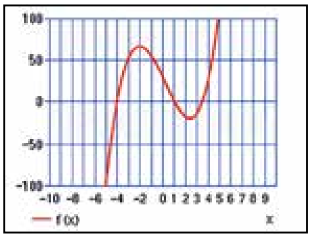
Una vez obtenida la tabla de valores, se genera un código *QR* mediante la combinación de teclas SHIFT OPTN.



La gráfica de la función se visualiza al capturar el código *QR* con la aplicación CASIO EDU⁺:



Para apreciar bien los puntos de corte con el eje *OX* es necesario cambiar la escala de la gráfica:

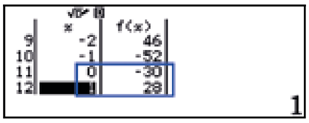


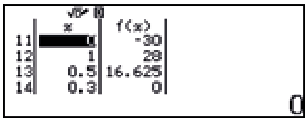
Al hacerlo, se observan los puntos de corte con el eje *OX*: (–4, 0); (1, 0) y (3.5, 0).

Explica detalladamente cómo se pueden obtener las raíces de la ecuación $10x^5 - 3x^4 - 70x^3 + 21x^2 + 100x - 30 = 0$

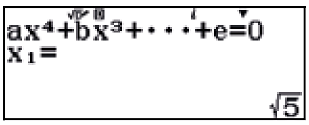
Las soluciones de esta ecuación no son enteras. Para obtener la primera solución se puede utilizar la iteración desde el menú *Tabla*.

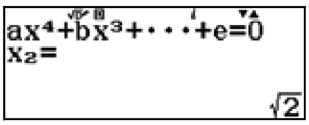
Una vez obtenida la primera solución, se puede utilizar el menú *Ecuación/Función* para calcular el resto, dado que resulta una ecuación de grado cuatro, que contrariamente a la de grado 5, sí se puede resolver mediante la calculadora.

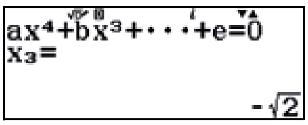


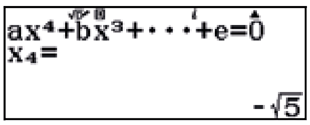


$$10x^5 - 3x^4 - 70x^3 + 21x^2 + 100x - 30 = (x - 0{,}3)(10x^4 - 70x^2 + 100) = 0$$

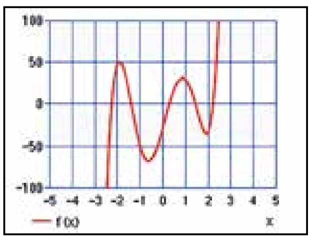






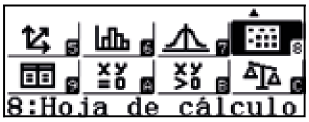


Como se observa, las soluciones de la ecuación son: 0.3; $-\sqrt{5}$; $-\sqrt{2}$; $\sqrt{2}$; $\sqrt{5}$.



La aplicación *Hoja de cálculo*

La hoja de cálculo es una herramienta habitual en las aulas y nadie duda de la ventaja que supone su uso a la hora de evitar la realización de cálculos tediosos y repetitivos. Una de las ventajas de usar la hoja de cálculo es la posibilidad de estudiar de forma rápida el efecto que tiene la variación de algún parámetro sobre los cálculos realizados, lo que facilita la adquisición de conceptos que de otro modo requerirían un tiempo del cual no se suele disponer.



En las páginas que siguen se desarrollan diversas explicaciones básicas sobre la aplicación *Hoja de cálculo* para resolver actividades de estadística.

Tradicionalmente el aprendizaje de los conceptos estadísticos se realiza con ejercicios y actividades donde, a cambio de obtener información de un conjunto de datos, se realizan muchos cálculos repetitivos. En las siguientes actividades se muestra como la hoja de cálculo permite que el alumno se centre en *cómo se hacen las cosas*, liberándose de las tareas de cálculo.

Se debe prestar atención en no cambiar de menú ni apagar la calculadora mientras se usa la hoja de cálculo, ya que se perderán los datos introducidos, debiendo empezar de nuevo todo el proceso.

A continuación se muestran las notas que han obtenido 28 alumnos en el último examen de Matemáticas del curso:

5 6 3 8 4 2 9 6 4 6 5 7 5 8 1 3 5 4 6 5 4 5 7 9 4 6 5 4

¿Cómo se puede construir la tabla de frecuencias?

La hoja de cálculo permite construir de forma cómoda la tabla de frecuencias correspondiente. Como se observa, las filas aparecen numeradas, y las columnas, designadas mediante letras. De esta forma, la celda que aparece en negrita se designa como B2.

	A	B	C	D	E
	x_i	f_i			
1	1	1			
2	2	1			
3	3	2			
4	4	6			
5	5	7			
6	6	5			
7	7	2			
8	8	2			
9	9	2			
10					

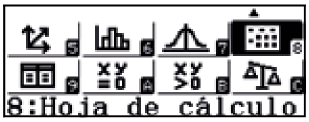
Esta es la celda *D6*

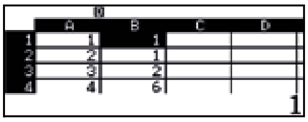
Para completar la fila de las frecuencias absolutas es preciso realizar un recuento de los datos. Una vez completado dicho recuento, se procede a introducir los datos en la calculadora. La aplicación solo permite introducir números y fórmulas, por lo que no se incluyen las cabeceras que aparecen en la figura superior.

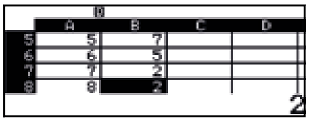
La aplicación *Hoja de cálculo*

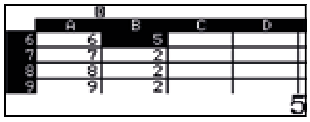
Se accede a la hoja de cálculo mediante las teclas MENU 8. Una vez dentro, se introducen los valores de la tabla de frecuencias, primero los de la columna x_i y, a continuación, los de la columna f_i.

MENU 8

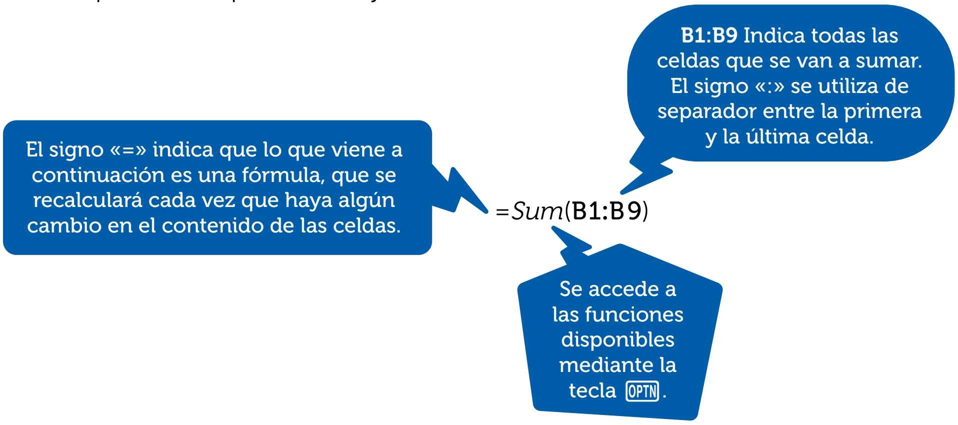






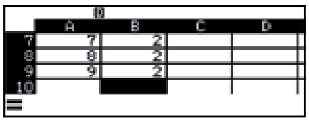


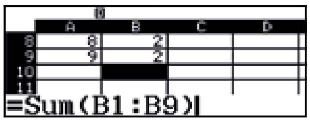
Para obtener el número total de datos, se suman todas las frecuencias absolutas. Para ello se ha de utilizar la misma sintaxis que en cualquier otra hoja de cálculo.



En la calculadora se ha de proceder de la siguiente manera:

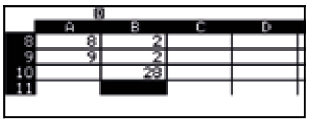
ALPHA CALC OPTN ▼ 4 ALPHA ,, 1 ALPHA ⌐ ALPHA ,, 9)





Cabe destacar que para introducir el signo «=» se ha usado la combinación de teclas ALPHA CALC, mientras que para introducir el signo «:», se ha usado ALPHA ⌐.

Una vez presionado el signo igual se obtiene el total de datos:



¿Cuántos alumnos tienen una calificación de notable?

Para calcular el número de alumnos que obtienen una calificación de notable, se suman las dos frecuencias absolutas que corresponden a los valores 7 y 8 de la variable. En este caso resulta ser de cuatro alumnos.

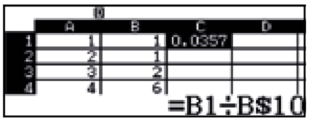
¿Qué proporción de alumnos tienen un cuatro?

Para responder esta cuestión se necesita calcular la razón entre el número de alumnos que han obtenido un cuatro y el total de alumnos:

$$\frac{6}{28} = \frac{3}{14} \cong 0{,}214$$

El hecho de disponer de una hoja de cálculo permite ampliar el cálculo a todos los valores de la variable. Como se acaba de ver, para calcular la proporción se ha dividido la frecuencia absoluta del valor de la variable entre el total de datos de los que se dispone. Es decir, se ha calculado la frecuencia relativa (h_i) para el valor de la variable $x_i = 4$. Para extender este cálculo a todos los valores de la variable se empieza por realizar la operación para el primero de estos valores, con lo que en la celda C1 se escribe =B1÷B$10. Para escribir el símbolo $ es necesario utilizar la combinación de teclas OPTN ▼ ▼ 1.

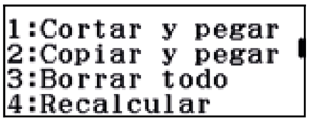
[ALPHA] [°'''] [1] [ALPHA] [▭] [ALPHA] [°'''] [1] [0] [OPTN] [1]



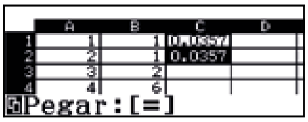
A continuación, se coloca el cursor sobre la casilla C1, y con la secuencia de teclas [OPTN] [▼] [2], se elige la opción *Copiar y pegar*. Seguidamente, se coloca el cursor en la celda donde se quiere pegar la fórmula y se presiona la tecla [=].

[OPTN] [▼]

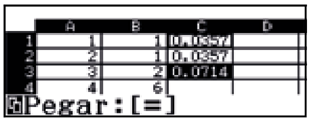
[2]



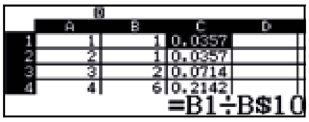
[▼] [=]

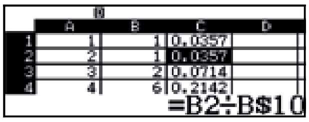


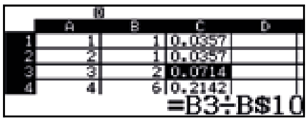
[▼] [=]

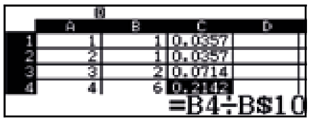


Una vez concluido el proceso, al situar el cursor sobre las celdas, en la parte inferior de la pantalla aparecen las fórmulas correspondientes, lo que muestra la utilidad del símbolo $.



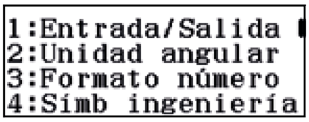






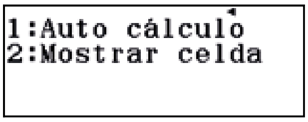
Al situarse sobre una celda de la hoja de cálculo puede aparecer el *Valor numérico* o la *Fórmula* que contiene, según se desee. Basta con acceder a la configuración de la calculadora, tal y como se indica a continuación, para decidir qué se visualiza.

[ALPHA] [MENU] [▼]



[4]

[2]



El símbolo «$» sirve para fijar la referencia de una fórmula situada detrás de dicho símbolo. Por ejemplo:

$B1. Fija la columna. Se utiliza cuando se quiere fijar una celda al pegar horizontalmente.

B$1. Fija la fila. Se utiliza cuando se quiere fijar una celda al pegar verticalmente.

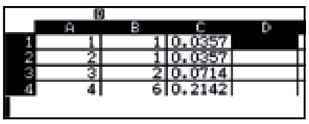
B1. Fija la columna y la fila, se utiliza cuando se quiere fijar una celda al pegar en cualquier dirección.

¿Qué porcentaje de alumnos ha obtenido un sobresaliente?

Es posible completar una nueva columna con el porcentaje de alumnos que han obtenido cada una de las notas. En este caso interesa conocer el porcentaje asociado a $x_i = 9$. Para ello, hay que hacer uso de la columna con las frecuencias relativas que se acaba de rellenar. Los valores de las celdas de la nueva columna serán el resultado de multiplicar por cien la correspondiente celda de la frecuencia relativa. Se puede proceder como se ha hecho anteriormente y definir la fórmula en la primera celda de la columna, para después copiarla en las celdas de esa misma columna que se desee.

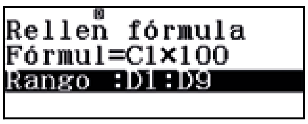
Otra manera de proceder consiste en hacer uso de la opción *Rellenar fórmula*, a la que se accede como se indica a continuación:

[OPTN]

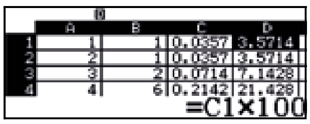


[1]

[ALPHA]



[ALPHA] [x] [1] [×] [1] [0] [0]



Observando la tabla se deduce que solo el 7,14 % de los alumnos ha obtenido un sobresaliente.

La aplicación *Hoja de cálculo*

¿Cuántos alumnos han suspendido?

Para responder a esta pregunta se utiliza la frecuencia absoluta acumulada, F_i, que no es más que la suma de todas las frecuencias absolutas correspondientes a los valores de la variable estadística que son menores que el valor elegido (en este caso, hay que considerar $x_i = 4$). Se trata, entonces, de sumar las frecuencias absolutas correspondientes a $x_i = 1$, 2, 3 y 4, resultando $1 + 1 + 2 + 6 = 10$.

Para construir la columna de frecuencias absolutas acumuladas se tiene que tener en cuenta dos propiedades de las mismas:

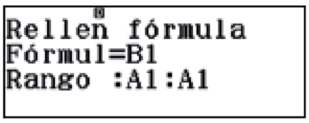
1. $F_1 = f_1$. Lógicamente, la primera frecuencia absoluta acumulada coincide con la frecuencia absoluta sin acumular, ya que no existen valores anteriores y, en consecuencia, no hay nada que sumar.
2. $F_i = f_i + F_{i-1}$. Dicho de forma más comprensible, no es necesario sumar desde el primer valor todas las frecuencias absolutas cada vez que se calcula una frecuencia acumulada, ya que todos esos valores, salvo el último, se encuentran ya acumulados en la frecuencia absoluta acumulada anterior.

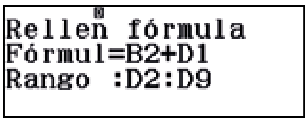
Por ejemplo, la frecuencia absoluta acumulada para $x_i = 7$ es $1 + 1 + 2 + 6 + 7 + 5 + 2 = 24$, pero también se puede obtener haciendo $2 + 22$.

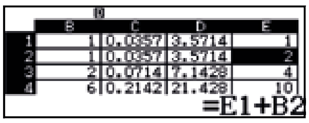
La tabla completa queda como sigue:

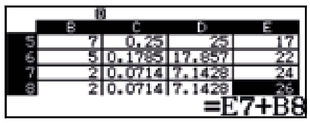
	A	B	C	D	D
	x_i	f_i	h_i	%	F_i
1	1	1	0,036	3,6	1
2	2	1	0,036	3,6	2
3	3	2	0,071	7,1	4
4	4	6	0,214	21,4	10
5	5	7	0,25	25	17
6	6	5	0,179	17,9	22
7	7	2	0,071	7,1	24
8	8	2	0,071	7,1	26
9	9	2	0,071	7,1	28
10		28			

Para completar, en la calculadora, la columna con las frecuencias absolutas acumuladas se procede introduciendo en E1 la fórmula =B1 y en E2 la fórmula =B2+D1, extendiéndolas al rango deseado:









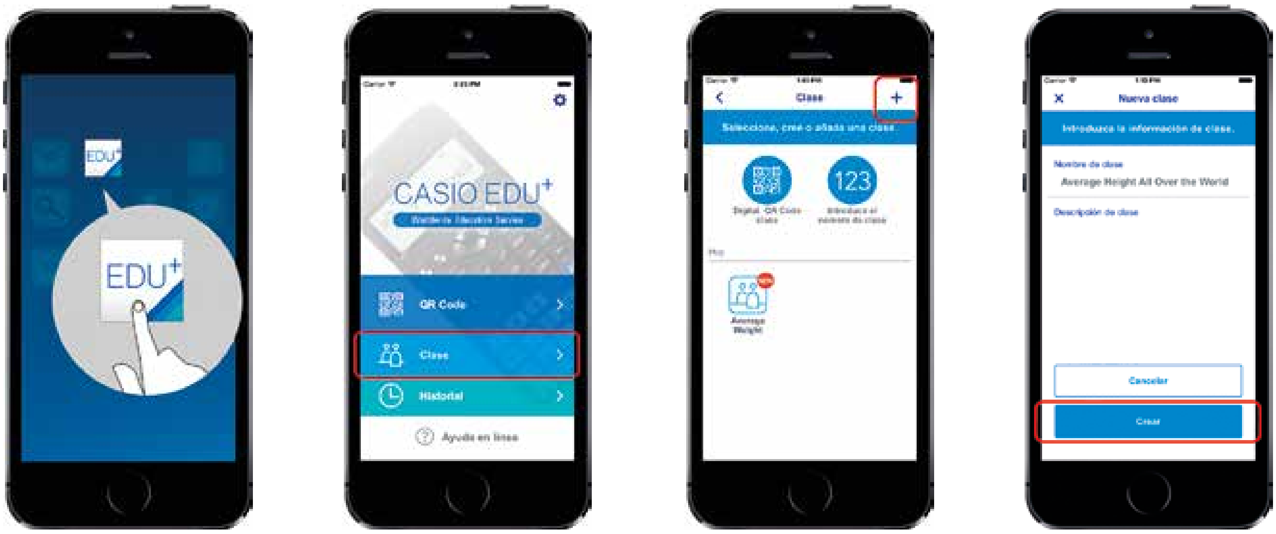
La aplicación CASIO EDU⁺ y el menú *Estadística*

La aplicación CASIO EDU+[1] favorece el trabajo colaborativo y cooperativo, pero para que el uso de esta aplicación resulte de provecho es recomendable planificar previamente la actividad que se va a desarrollar.

En primer lugar, se tiene que crear una clase[2], lo que se puede hacer de dos formas:

a) Desde un dispositivo móvil

Se accede a la aplicación tocando el icono CASIO EDU⁺, a continuación se selecciona *Clase* y se toca el símbolo +, situado en la parte superior derecha de la pantalla, para crear una nueva clase. Seguidamente, se escribe el nombre de la clase y una breve descripción. A continuación, se selecciona *Crear*.



b) Desde la página http://wes.casio.com/es-es/class/

Se accede a la web http://wes.casio.com/es-es/class/ y se escribe el nombre de la clase y una breve descripción. Finalmente, se pulsa *Crear*.

Cabe señalar que algunos navegadores, como Google Chrome, pueden dar problemas a la hora de mostrar los contenidos compartidos en la clase.

[1] En el siguiente enlace se puede consultar todo lo necesario acerca de la aplicación CASIO EDU⁺: http://wes.casio.com/es-es/education/extension/casioeduplus/#casioeduplus03

[2] Una clase es una página que se puede utilizar para ver y gestionar los gráficos y tablas correspondientes a los códigos *QR* escaneados. Al comparar o combinar varios conjuntos de datos en la clase, es posible visualizar en una pantalla las actividades de los estudiantes, o mostrar y comparar los resultados del trabajo en grupo.

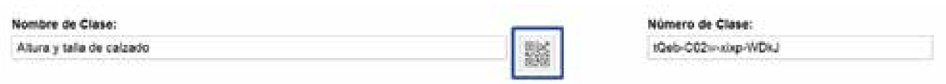
La aplicación CASIO EDU+ y el menú *Estadística*

La clase[3] que se acaba de crear aparecerá de la siguiente forma:

Tras la creación de la clase, los estudiantes deben añadirse a la misma, de manera que puedan compartir y combinar datos y gráficos. Lo pueden hacer de tres formas distintas:

a) Escaneando el código *QR*

Al crear la clase, se genera automáticamente un código *QR* que la identifica. Para que se muestre en el navegador, hay que pulsar sobre el icono que aparece al lado del nombre de la clase.



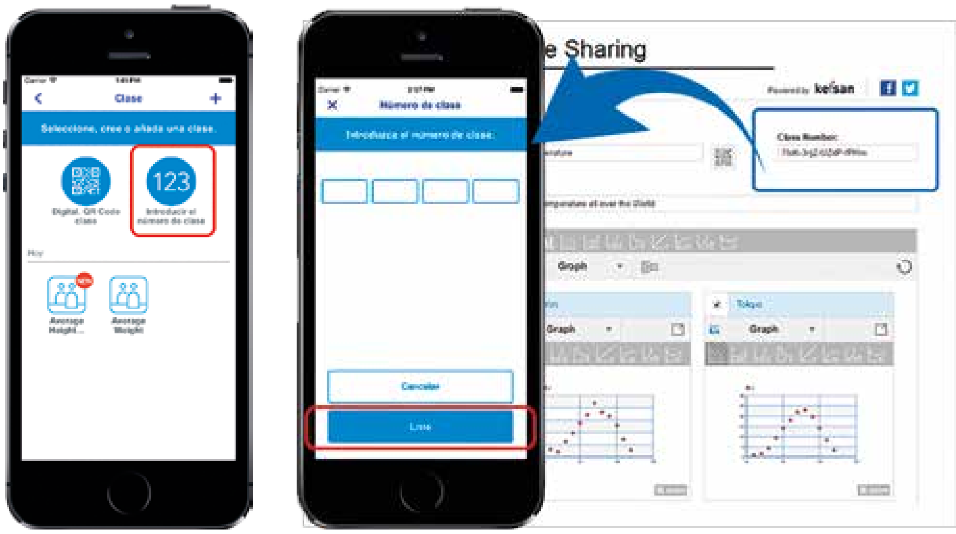
A continuación, cada estudiante debe abrir en su dispositivo móvil la aplicación CASIO EDU+, seleccionar la opción *Clase* y, seguidamente, tocar sobre *Digitalizar el QR Code de clase*.

Para terminar, una vez se ha escaneado el código *QR* correctamente, se debe seleccionar *Guardar clase*.

[3] La Clase se eliminará si no se accede a ella en 1 año. Cada clase puede contener un máximo de 50 conjuntos de datos.

b) Introduciendo el *Número de Clase*

Cada alumno abre la aplicación CASIO EDU⁺ y selecciona la opción *Clase*, seguidamente selecciona *Introducir el número de clase* y escribe el número de clase que figura en el navegador, en este caso, tQeb-C02w-xixp-WDkJ. Finalmente, toca sobre *Listo*.



c) Accediendo a la URL de la clase

El profesor puede enviar la URL de la clase por correo electrónico, de modo que el alumno pueda acceder directamente a la clase. En este caso, se accede a la web desde la URL

http://wes.casio.com/class/tQeb-C02w-xixp-WDkJ

Hay que tener en cuenta que todos aquellos usuarios que hayan accedido a la clase pueden realizar modificaciones sobre la misma.

Realización de estudios estadísticos

La realización de cálculos estadísticos mediante la calculadora permite que el alumno centre su interés en la interpretación de los parámetros estadísticos y no en su cálculo. El menú *Estadística*, junto con la aplicación CASIO EDU⁺, permite que el alumno haga razonamientos estadísticos y tome decisiones sobre, por ejemplo, qué parámetros calcular y cómo interpretarlos. Y todo ello con la ayuda que presta la visualización de los correspondientes gráficos estadísticos, que pueden mostrarse individualmente o combinados para realizar el análisis estadístico por separado o conjuntamente.

Para analizar el funcionamiento de esta aplicación, se puede realizar un estudio estadístico sobre la altura y talla del calzado de los alumnos de una determinada clase, para lo que se tendrán que representar los datos y calcular los parámetros estadísticos correspondientes.

Tomemos, por ejemplo, los siguientes datos, correspondientes a un grupo de alumnos de edades similares:

Estudiante	Sexo	Altura (cm)	Talla calzado	Estudiante	Sexo	Altura (cm)	Talla calzado
1	H	180	45	16	M	153	37
2	H	173	43	17	M	159	36
3	H	173	41	18	M	153	37
4	H	176	41	19	M	162	37
5	H	191	47	20	M	167	36
6	H	193	46	21	M	157	38
7	H	172	41	22	M	159	36
8	H	173	43	23	M	165	37
9	H	174	43	24	M	168	38

La aplicación CASIO EDU⁺ y el menú *Estadística*

Estudiante	Sexo	Altura (cm)	Talla calzado	Estudiante	Sexo	Altura (cm)	Talla calzado
10	H	180	44	25	M	154	37
11	H	181	43	26	M	159	37
12	H	180	42	27	M	159	35
13	H	184	42	28	M	154	36
14	H	174	45	29	M	161	37
15	H	175	45	30	M	165	38

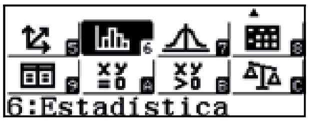
Para realizar el estudio estadístico, se pueden agrupar a los alumnos y distribuir las tareas de la siguiente forma:

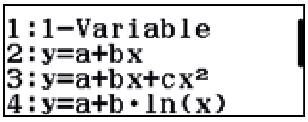
Grupo 1	Altura chicos sin frecuencias
Grupo 2	Altura chicas sin frecuencias
Grupo 3	Altura sin frecuencias
Grupo 4	Altura chicos con frecuencias
Grupo 5	Altura chicas con frecuencias
Grupo 6	Altura con frecuencias
Grupo 7	Talla calzado chicos sin frecuencias
Grupo 8	Talla calzado chicas sin frecuencias
Grupo 9	Talla calzado sin frecuencias
Grupo 10	Talla calzado chicos con frecuencias
Grupo 11	Talla calzado chicas con frecuencias
Grupo 12	Talla calzado con frecuencias

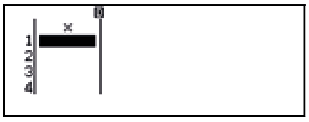
Representación de diagramas de caja y bigotes

En este caso, se elige el modo *Estadística* y, seguidamente, se selecciona la opción 1: *1-variable*.

MENU 6 1



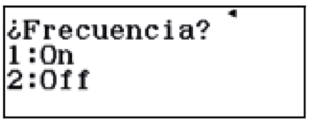




El desarrollo de esta actividad requiere que se introduzcan los datos con y sin frecuencias, con el fin de explorar todas las posibilidades que nos ofrece la calculadora en combinación con la aplicación CASIO EDU⁺.

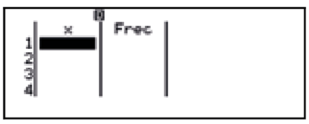
Se pueden activar o desactivar las frecuencias de la tabla estadística en cualquier momento mediante la siguiente secuencia:

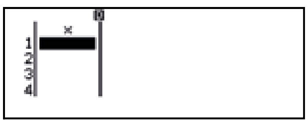
SHIFT MENU ▼ 3



Al pulsar seleccionar 1, se activa la columna de las frecuencias, y al seleccionar 2, se desactiva.

1 2

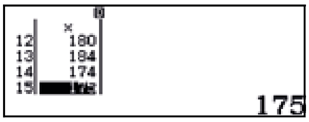




La aplicación CASIO EDU⁺ y el menú *Estadística*

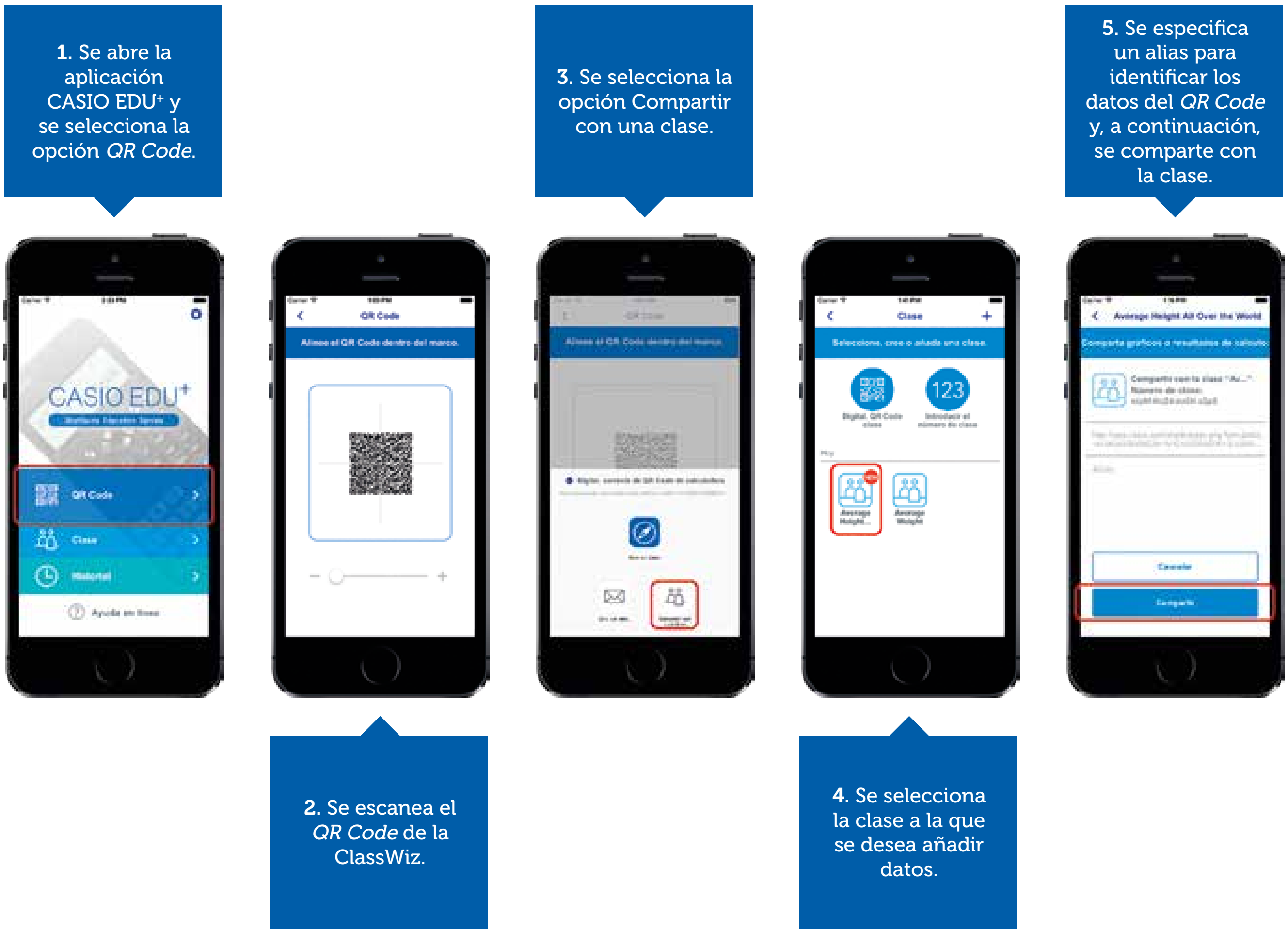
A continuación, cada grupo introduce en la calculadora, los datos de la altura o la talla del calzado que le han sido asignados en la distribución de tareas. Una vez completada la tabla, genera un código *QR*, lo escanea con la aplicación CASIO EDU⁺ y lo comparte con la clase creada anteriormente. Es importante que introduzca su alias y una breve descripción de los datos.

A continuación se muestra la tabla sin frecuencias con la altura de los chicos:



Desde esta ventana se genera un código *QR* mediante la secuencia de teclas SHIFT OPTN.

A continuación, se escanea el código que aparece en la pantalla siguiendo los siguientes pasos:

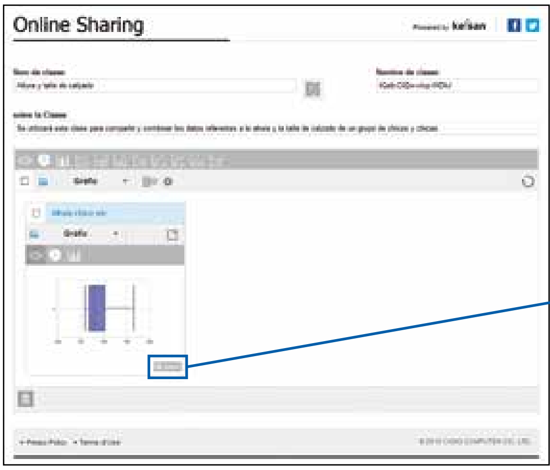


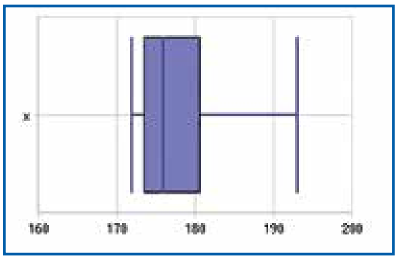
Otra manera de compartir datos con la clase consiste en entrar previamente en la clase creada y seleccionar la opción *Añadir gráficos y resultados de cálculo*. Se abrirá, así, una nueva ventana en la que se podrá escanear el código *QR*. Una vez escaneado, se abrirá una nueva ventana en la que se escribirá el alias; a continuación aparecerá un mensaje con dos opciones: *Abrir clase en Safari* (o en el Explorador) o *Digitalizar QR Code*.

Si no se tiene que digitalizar más códigos, se accede a la clase para visualizar los gráficos o cálculos compartidos.

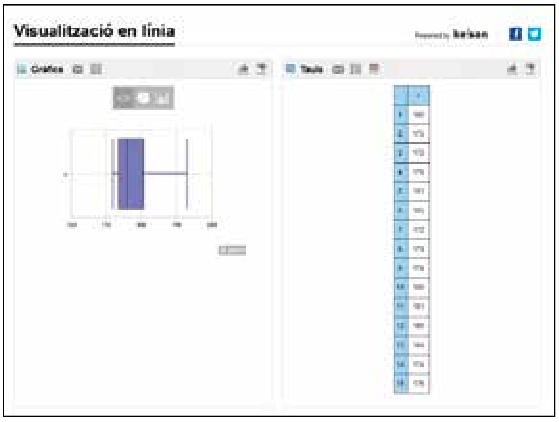
La aplicación CASIO EDU+ y el menú *Estadística*

Se puede visualizar mejor el gráfico pulsando sobre zoom.





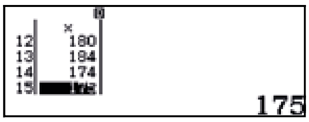
Pulsando sobre el icono , se visualiza el diagrama de caja y bigotes y la tabla de valores correspondiente:



Cálculo de parámetros estadísticos

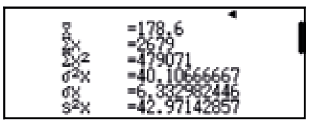
Una vez los grupos han compartido sus gráficos, pueden escanear los parámetros de su estadística. Para ello, primero hay que calcular los parámetros estadísticos, operando del siguiente modo:

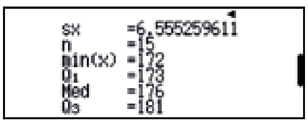
OPTN

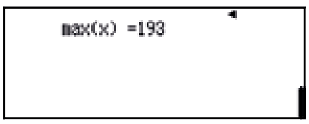


3

Se obtienen, entonces, los parámetros estadísticos:

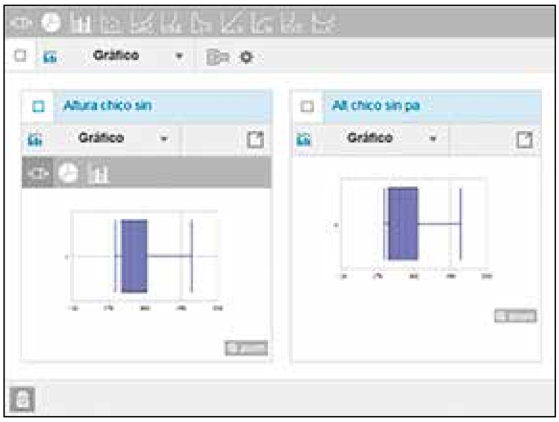


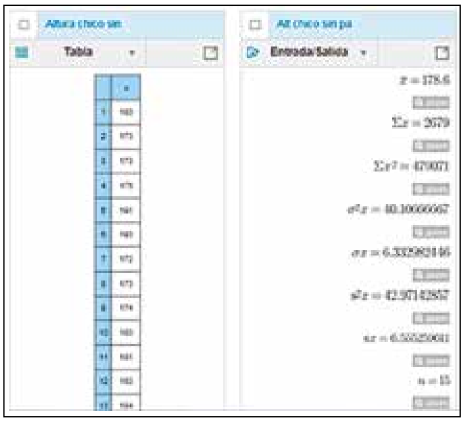




Una vez se tienen los parámetros en pantalla, se puede generar el código *QR* correspondiente, mediante la secuencia SHIFT OPTN. Tras compartirlos con la clase, se mostrarán en pantalla de la siguiente forma:

La aplicación CASIO EDU+ y el menú *Estadística*



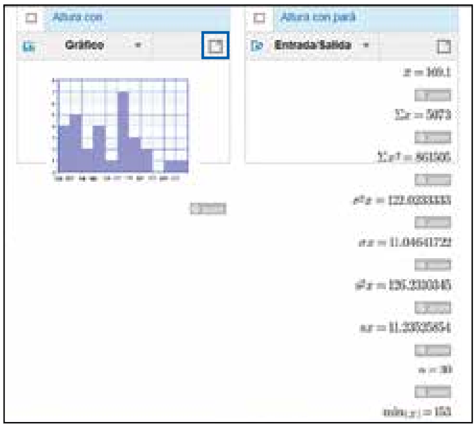


Representación de histogramas y diagramas de barras

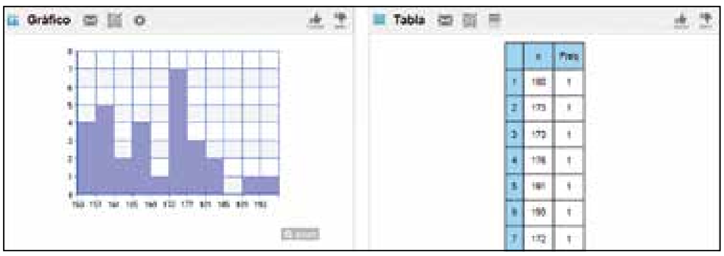
Para representar histogramas y diagramas de barras hay que introducir los datos en una tabla estadística con frecuencias.

- Si se genera el código *QR* desde la tabla de frecuencias, al escanearlo, se visualizará el histograma o el diagrama de barras junto con la tabla de frecuencias.
- Si se genera el código *QR* desde la ventana con los parámetros estadísticos, al escanearlo, se visualizarán los parámetros y el diagrama de caja y bigotes.

En el último caso, se visualiza exactamente lo mismo que si se escanean los parámetros estadísticos obtenidos a partir de una tabla sin frecuencias, pero no se podrán combinar los gráficos de cajas y bigotes.

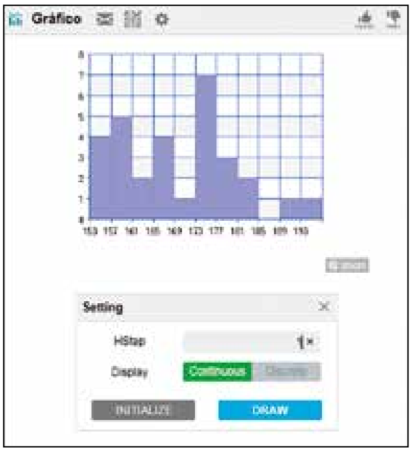


Al pulsar sobre el icono se despliega el histograma y la tabla de valores.

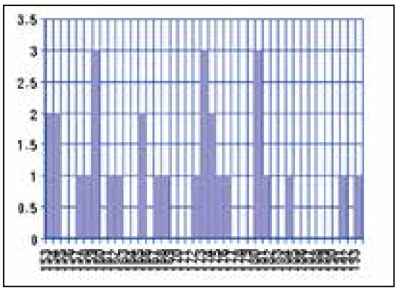


Pulsando sobre el icono de preferencias, se puede elegir la amplitud de los rectángulos y la visualización: discreta o continua, lo que permite representar diagramas de barras e histogramas, respectivamente.

La aplicación CASIO EDU^{+} y el menú *Estadística*



Pulsando sobre *zoom*, se abre el diagrama. En este caso, se ha elegido diagrama de barras, para que se muestre la moda.

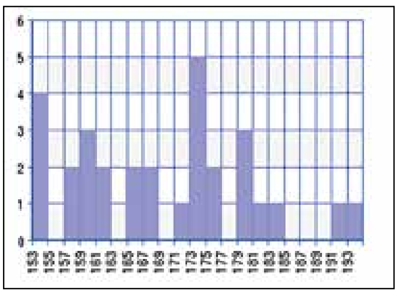


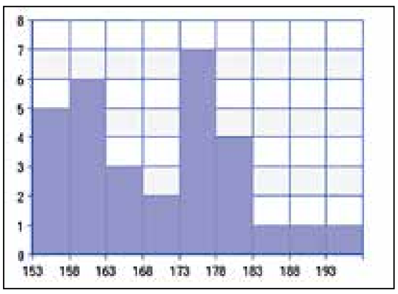
Comparación de gráficos estadísticos

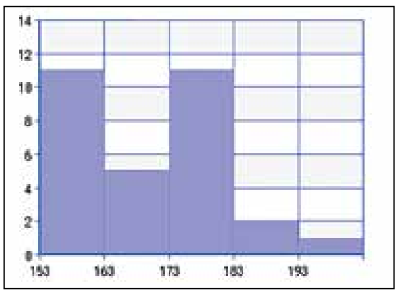
Para visualizar todos los gráficos y parámetros introducidos por cada grupo hay que refrescar la página, tocando en el icono . Una vez se han introducido todos los datos en la clase, es el momento de analizarlos.

Del cálculo de los parámetros de la variable altura se observa que la media es de 169,1 cm; la desviación típica, de 11,046 cm, y la mediana, de 170 cm. Se observa, además, que la distribución es multimodal (159, 173, 180) y que el 50 % de la clase está situada entre los 159 cm y los 176 cm.

Si se representan los datos en un histogramas de 2 cm en 2 cm, de 5 cm en 5 cm y de 10 cm en 10 cm, se observa que aunque los tres gráficos se parecen, es el segundo el que ofrece mayor información, porque aunque se observan dos grandes bloques de alturas, hay un intervalo sensiblemente superior al resto. Ahora bien, como hay dos bloques claramente diferenciados, cabe preguntarse si realmente los datos sobre la altura pertenecen a una sola población, es decir, si el sexo no influye en la altura, o si por el contrario se trata de dos poblaciones distintas y el sexo sí que influye.

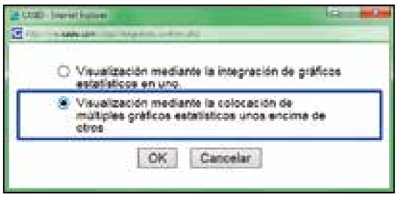


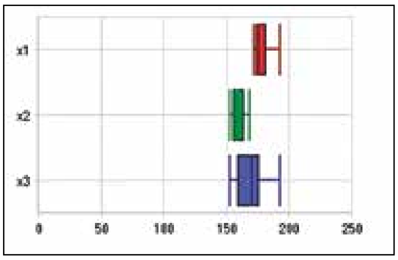


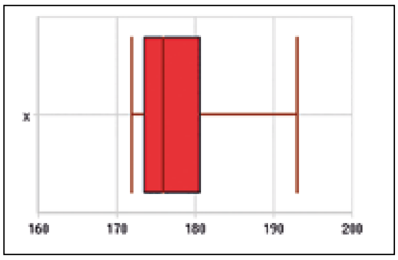


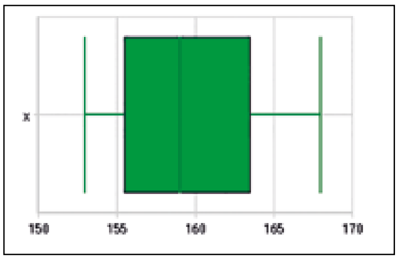
Para dar respuesta a esta cuestión, se puede utilizar la representación de caja y bigotes. Dado que la aplicación permite combinar gráficos, siempre que se hayan introducido de la misma forma, se pueden visualizar simultáneamente los diagramas de caja y bigotes de los chicos, las chicas y toda la población. Para hacerlo, hay que pulsar sobre el icono .

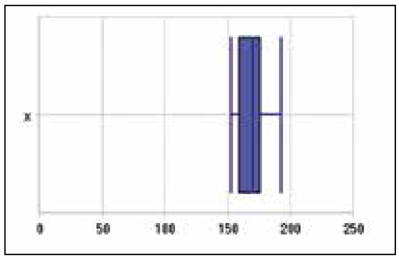
Existen dos posibilidades de visualizar los gráficos conjuntamente, en este caso hay que elegir la segunda opción y pulsar *OK*. A continuación se muestran los tres gráficos combinados y separadamente.











Como se observa, los gráficos de chicos y chicas son diferentes, lo que lleva a pensar que efectivamente, respecto de la altura, los chicos y las chicas son poblaciones distintas.

Si se analizan los parámetros de las dos subpoblaciones, las cuales se han recogido en la siguiente tabla, se observa que las medias son sensiblemente diferentes y que las desviaciones típicas correspondientes son casi la mitad de la de toda la clase. Esto refuerza la suposición de que son dos poblaciones distintas y justifica la existencia de tres modas.

	Media	Desviación típica	Moda
Altura	169,1	11,046	159, 173, 180
Altura Chicas	159,6	4,841	159
Altura Chicos	178,6	6,333	173, 180

Se puede realizar un estudio similar sobre la talla del calzado. Además, se pueden utilizar los datos para estudiar la relación entre la altura y la talla del calzado.


B$1
MENU
SHIFT
$F_i = f_i + F_{i-1}$
f_i
$C(x) = x^4 + 2x^3 + 4x^2 + 5x +$
60th
ANNIVERSARY
SINCE 1957
CASIO
Federación
Española de
Sociedades de
Profesores de
Matemáticas
B1
SHIFT
$B1
$y = 2x^3 - x^2 - 29x + 28$
=Sum(B1:B9
MENU